Feuille_Exo_1 : Séries numériques .

Ex 1 : Déterminer la nature des série suivantes : *(on ne cherchera pas à calculer leur somme)*

$$1)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+2}\qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{n+1}{2+n}\qquad 3)\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln(n)}{n}\qquad 4)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n+1}}{n^3+1}$$

$$5)\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{3^n-n}\qquad 6)\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{-n}}{n}\qquad 7)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{-n}{n^3+2n}\qquad 8)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n-3^n}{5^n+3^n}$$

Ex 2 : Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

$$1)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+2^n}\qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{2n-n^2}{n^4-3n}$$

$$4)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-2)^n}{n^3+1}\qquad 5)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n\sin(n)}{3^n-2}\qquad 6)\sum_{n\geqslant 0}\cos(n)e^{-n}$$

Ex 3 : Montrer que les séries suivantes sont convergentes.

$$1)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n^2}\qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{3^n-n}\qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n^2}$$

$$4)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-2)^n}{5n^3-3^n}\qquad 5)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\qquad 6)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-5)^n+3^n}{6^n-7^n}$$

Ex 4 : Déterminer la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\geq 2}\frac{5}{4^n\ln n}\quad 2)\ \sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\quad 3)\ \sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k)}{k^2}\quad 4)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\quad 5)\ \sum_{k\geq 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k^2}$$

Ex 5 : *Comparaison série / intégrale.*

1) Montrer que $\forall k\geqslant 2,\quad \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx\leqslant\frac{1}{k\ln k}$.

2) En déduire que pour tout $n\geqslant 2,\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\geqslant\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln 2)$.

3) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$.

Ex 6 : *(Séries de Riemann) Le but de cet exercice est la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

Soit α un réel,

1) Montrer que pour $\alpha\leqslant 1$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Dans la suite de cet exercice α est un réel strictement supérieur à 1.

2) On note f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$.

   a. Dresser le tableau de variations de f et de f'.

   b. Montrer que pour $k\geqslant 2$: $\quad\dfrac{1}{k^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{\alpha-1}\left((k-1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\right)$

3) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left((n-1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right)$ est convergente.

4) Conclure.

Ex 7 : *(Séries alternées)*

Soit (a_n) une suite réelle telle que (a_n) est décroissante et convergente vers 0.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1) Montrer que les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

2) En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$

3) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S - S_n| \leqslant a_{n+1}$$

Ex 8 : *(On peut utiliser ici le résultat démontré dans l'Ex 3 sur les séries alternées)*

1) Montrer que

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

2) Montrer que lorsque $n \to +\infty$, $\quad \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{n}$

3) Déterminer la nature des séries :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad\qquad \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$$

Ex 9 : *(Règle de d'Alembert)*

Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$ *($\alpha \in \mathbb{R}_+$ ou $\alpha = +\infty$)*

1) On suppose ici que $\alpha \in \left]1; +\infty\right[$ ou $\alpha = +\infty$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

   b. En déduire que la série $\sum u_n$ est divergente.

2) On suppose ici que $\alpha \in \left[0\,; 1\right[$.

   a. Justifier qu'il existe un réel q dans $[0, 1[$ tel qu'à partir d'un certain rang N, $\ u_{n+1} \leqslant q\, u_n$.

   b. En déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\quad u_n \leqslant C\, q^n$.

   c. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

3) Montrer, avec des séries de référence, que l'on ne peut pas conclure lorsque $\alpha = 1$.