BCPST2$_A$ *(Lundi 15 septembre 2025)* Nom :

Interrogation **(Sujet B)** (25 minutes)

Dans la plupart des questions on demande un ***résultat simplifié*** *sans le détail des calculs*

(Utiliser un brouillon)

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Complétez les phrases, les égalités suivantes ou répondez aux questions.

Simplifier les calculs suivants :

$$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \text{............} \qquad \frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}} = \text{............}$$

/2pt

Compléter : *(Juste la réponse)*

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \text{....................} \qquad \int_0^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \text{....................} \qquad \int_{-3}^3 3x\,e^{-\frac{x^2}{3}}\,\mathrm{d}x = \text{....................}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \text{....................} \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \text{....................} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \text{....................}$$

/3pt

Soit n un entier supérieur ou égal à 3, compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} 4^k = 4 \sum_{k=....}^{....} 4^k \qquad \sum_{k=0}^{n} (k+1)\frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=...}^{n+1} \text{.......} \left(\frac{1}{3}\right)^{\cdots}$$

Soit (u_n) une suite numérique quelconque, compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\cdots} u_{\cdots} \qquad \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} u_{k+2} \qquad \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} u_{n-k}$$

/3pt

p et n sont deux entiers naturels vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$

Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \text{.........} \qquad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \text{.........} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \text{.........}$$

/2pt

Rappeler avec soin les deux limites du cours sur les suites appelé croissances comparées :

Calculer les limites suivantes et préciser si elles sont obtenues par application des règles sur les opérations de limites ou par résultats classiques du cours (croissance comparée) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n^2} =$ .... *opérations de limites* ☐ ou *croissance comparée* ☐

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(0{,}2)^n} =$ .... *opérations de limites* ☐ ou *croissance comparée* ☐

/3pt

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \big(k! - (k-1)!\big) = \text{..............} \qquad \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \text{................}$$

/2pt

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -2\ ,\ u_1 = 1\ , \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4\,u_{n+1} - u_n + n$$

Ecrire une fonction `suite_u(n)` Python permettant de calculer u_n

/2pt

Donner les limites suivantes et une brève explication :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k2^{-k} =$..........................

En effet : ....

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2n} =$..........................

En effet : ....

/2pt

Illustrer par un dessin la méthode des rectangles :

Enoncer avec soin le théorème associé sur les sommes de Riemann.

/3pt