Correction de l'interrogation **(Sujet B)** (25 minutes)

*Dans la plupart des questions on demande un **résultat simplifié*** *sans le détail des calculs*
(Utiliser un brouillon)

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Complétez les phrases, les égalités suivantes ou répondez aux questions.

Simplifier les calculs suivants :

$$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{3} \qquad \frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}} = -\frac{5}{17}$$

/2pt

Compléter : *(Juste la réponse)*

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \qquad \int_0^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 4\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \int_{-3}^3 3x\,e^{-\frac{x^2}{3}}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1$$

/3pt

Soit n un entier supérieur ou égal à 3, compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} 4^k = 4\sum_{k=0}^{n-1} 4^k \qquad \sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Soit (u_n) une suite numérique quelconque, compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} \qquad \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-2} u_{k+2} \qquad \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-2} u_{n-k}$$

/3pt

p et n sont deux entiers naturels vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$

Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

/2pt

Rappeler avec soin les deux limites du cours sur les suites appelé croissances comparées :

$$\text{Si } a>1 \text{ et } \alpha>0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

Calculer les limites suivantes et préciser si elles sont obtenues par application des règles sur les opérations de limites ou par résultats classiques du cours (croissance comparée) :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n^2} = +\infty$ *opérations de limites* ☐ ou *croissance comparée* ■

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{(0{,}2)^n} = +\infty$ *opérations de limites* ■ ou *croissance comparée* ☐

/3pt

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \big(k! - (k-1)!\big) = n! - 1 \qquad \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

/2pt

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -2 \ , \ u_1 = 1 \ , \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4\, u_{n+1} - u_n + n$$

/2pt Ecrire une fonction `suite_u(n)` Python permettant de calculer u_n

```
def suite_u(n):
    u, v = -2, 1
    for k in range(n):
        u, v = v, 4*v - u + k
    return u
```

Donner les limites suivantes et une brève explication :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k 2^{-k} = 2$

En effet : *Série géométrique dérivée d'ordre 1 et* $\dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+2n} = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

En effet :*C'est une somme de Riemann et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x = \ln(3) - \ln(2)$

/2pt

Illustrer par un dessin la méthode des rectangles :

non corrigé, voir votre cours.

Enoncer avec soin le théorème associé sur les sommes de Riemann.

Théorème : Si f est continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

/3pt