

Correction de l'interrogation (**Sujet A**) (25 minutes)

Dans la plupart des questions on demande un **résultat simplifié** sans le détail des calculs.

(Utiliser un brouillon)

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Complétez les phrases, les égalités suivantes ou répondez aux questions.

Simplifier les calculs suivants :

$$9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 36 \qquad \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{5}{17}$$

/2pt

Compléter : (Juste la réponse)

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \qquad \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} \qquad \int_{-2}^2 3x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln(3) \qquad \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

/3pt

Soit n un entier supérieur ou égal à 3, compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=2}^n 3^k = 3^2 \sum_{k=0}^{n-2} 3^k \qquad \sum_{k=0}^n (k+1) \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Soit (u_n) une suite numérique quelconque, compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-2} u_{k+2} \qquad \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} \qquad \sum_{k=1}^n u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

/3pt

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n (k^4 - (k+1)^4) = -(n+1)^4 \qquad \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{1}{n} - 1$$

/2pt

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = nu_n - u_{n+1}$$

/2pt

Ecrire une fonction `suite_u(n)` Python permettant de calculer u_n

```
def suite_u(n):
    u, v = 2, -1
    for k in range(n):
        u, v = v, k*u-v
    return u
```

p et n sont deux entiers naturels vérifiant $0 \leq p \leq n$

Simplifier :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

/2pt

Donner les limites suivantes et une brève explication :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{1}{2^{n-2}} = 16$$

En effet : *Série géométrique dérivée d'ordre 2 et* $\frac{2}{(1 - \frac{1}{2})^3} = 2^4$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k} = \frac{\ln(2)}{2}$$

En effet : *C'est une somme de Riemann et* $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$

/2pt

Rappeler avec soin les deux limites du cours sur les suites appelé croissances comparées :

Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Calculer les limites suivantes et préciser si elles sont obtenues par application des règles sur les opérations de limites ou par résultats classiques du cours (croissance comparée) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(0,1)^n}{n} = 0 \quad \text{opérations de limites} \blacksquare \quad \text{ou} \quad \text{croissance comparée} \square$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty \quad \text{opérations de limites} \square \quad \text{ou} \quad \text{croissance comparée} \blacksquare$$

/3pt

Illustrer par un dessin la méthode des rectangles :

non corrigé, voir votre cours.

Enoncer avec soin le théorème associé sur les sommes de Riemann.

Théorème : Si f est continue sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

/3pt