Correction de la feuille_Exo_1 : Séries numériques .

Ex 1 : 1) $\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n^2+2} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \\ \text{et} \quad \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \ \text{converge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)*

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+2} \ \text{converge}}$$

2) $\dfrac{n+1}{2+n} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2+n} = 1$ *le terme général de la série ne tend pas vers* 0 et ainsi :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{2+n} \ \text{diverge} \ \textit{(grossièrement)}}$$

3) $\begin{cases} \text{pour tout } n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n} \\ \text{et} \quad \displaystyle\sum \frac{1}{n} \ \text{diverge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)*

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n} \ \text{diverge}}$$

4) • $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^3+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} \geqslant 0$

donc *(théorème de convergence par équivalence)*

les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ sont de même nature.

• de plus $\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \\ \text{et} \quad \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \ \text{converge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence par comparaison)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ converge

En conclusion :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+1} \ \text{converge}}$$

5) $\dfrac{n}{3^n-n} = \dfrac{n}{3^n} \times \dfrac{1}{1-\frac{n}{3^n}}$ donc *(croissance comparées)* $\dfrac{n}{3^n-n} \sim \dfrac{n}{3^n}$

$\begin{cases} \dfrac{n}{3^n-n} \sim \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n}{3^{n-1}} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0, \ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n}{3^{n-1}} \geqslant 0 \\ \text{et} \quad \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{3} \times \frac{n}{3^{n-1}} \ \text{converge} \qquad \textit{(série géométrique dérivée d'ordre 1)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)*

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{3^n-n} \ \text{converge}}$$

6) $\begin{cases} \text{pour tout } n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{e^{-n}}{n} \leqslant \left(\dfrac{1}{e}\right)^n \\ \text{et} \quad \sum \left(\dfrac{1}{e}\right)^n \text{ converge} \qquad \textit{(série géométrique de raison dans }]-1,1[) \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)*

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-n}}{n} \text{ converge}}$$

7) $\dfrac{-n}{n^3+2n} = -\dfrac{1}{n^2+2}$

$\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n^2+2} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \\ \text{et} \quad \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} \text{ converge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+2}$ converge et ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{-n}{n^3+2n} \text{ converge}}$$

8) *(non corrigé)*

Ex 2 : Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1) $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

2) $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+2^n}\right| = \dfrac{1}{n+2^n}$

or $\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{2^n+n} \leqslant \dfrac{1}{2^n} \\ \text{et} \quad \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} \text{ converge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+2^n}$ converge et ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+2^n} \text{ est absolument convergente}}$$

3)

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n-n^2}{n^4-3n}\right| &= \left|\frac{2-n}{n^3-3}\right| \\ &= \frac{n}{n^3} \times \left|\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n^3}}\right| \\ &\sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

or $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|\dfrac{2n-n^2}{n^4-3n}\right|$ converge.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n-n^2}{n^4-3n} \text{ est absolument convergente}}$$

4) *(non corrigé)*

5) *(non corrigé)*

6) $\begin{cases} \text{pour tout } n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant |\cos(n)e^{-n}| \leqslant \left(\dfrac{1}{e}\right)^n \\ \\ \text{et} \quad \sum \left(\dfrac{1}{e}\right)^n \quad \text{converge} \qquad \textit{(série géométrique de raison dans }]-1,1[\textit{)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)*

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \cos(n)e^{-n} \text{ converge}}$$

Ex 3 : 1) $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente,

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \text{ est convergente.}}$

2) *(non corrigé)*

3) *(non corrigé)*

4) *(non corrigé)*

5) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{(-1)^n}{n^2}$

on a donc $\begin{cases} \left|\ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0 \\ \\ \text{et} \quad \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} \quad \text{converge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

d'où *(théorème de convergence)* la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est absolument convergente

et ainsi (AVC $\Rightarrow$ CV) $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right) \text{ est convergente}}$

Ex 4 : 1) $\begin{cases} \text{pour tout } n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant \dfrac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant 5\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \\ \\ \text{et} \quad \sum \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \quad \text{converge} \qquad \textit{(série géométrique de raison dans }]-1,1[\textit{)} \end{cases}$

donc *(théorème de convergence)*

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{4^n \ln(n)} \text{ converge}}$$

2) $\begin{cases} \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2n} \geqslant 0 \\ \\ \text{et} \quad \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n} \quad \text{diverge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

d'où *(théorème de convergence)* la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right)$ est divergente.

3) *(non corrigé)*

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\pi}{n^2} \geqslant 0 \\ \\ \text{et} \quad \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\pi}{n^2} \quad \text{converge} \qquad \textit{(série de référence)} \end{cases}$

d'où *(théorème de convergence)* la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ est convergente.

5) *(non corrigé)*

Ex 5 : *Raisonnement classique, déjà rencontré dans la démonstration de la nature de la série harmonique.*

On note f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

1) • f est dérivable sur $[2;+\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{-(1+\ln(x))}{x^2(\ln(x))^2} < 0$

donc f est décroissante sur $[2;+\infty[$.

• Ainsi pour un entier $k \geqslant 2$ on a : $\forall x \in [k;k+1],\ \ f(x) \leqslant f(k)$ et en intégrant sur $[k;k+1]$ il vient :

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}}$$

2) En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 2 à un entier n il vient avec la relation de Chasles :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

or $\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$ donc $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(\ln(x))\Big]_2^{n+1}$

et ainsi :

$$\boxed{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}$$

3) On sait que $\forall k \geqslant 2,\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$

donc (*Th. de comparaison du cours sur les suites*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge}}$$

Ex 6 : *(En classe nous n'avons pas fait cet exercice la démo faite en classe est dans le cours)*

1) On suppose $\alpha \leqslant 1$,

$1-\alpha \geqslant 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp((1-\alpha)\ln(n)) \geqslant 1$ ou encore $n^{1-\alpha} \geqslant 1$

On peut alors affirmer que : $\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha} \\ \displaystyle\sum \frac{1}{n} \quad \text{diverge} \end{array}\right.$ ce qui entraîne *(théorème de convergence)* que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est divergente}}$$

Dans la suite de cet exercice $\alpha > 1$.

2) a. $f : x \longmapsto x^{1-\alpha}$ est deux fois dérivables sur $[1;+\infty[$ *(fonctions usuelles)* et pour $x \geqslant 1$:

$$f'(x) = (1-\alpha)x^{-\alpha} \qquad\qquad f''(x) = -\alpha(1-\alpha)x^{-\alpha-1}$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

x	1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
f'	$1-\alpha$	$\nearrow$	0

$f(x) = x^{1-\alpha}$ et $1-\alpha < 0$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$

$f'(x) = (1-\alpha)x^{-\alpha}$ et $-\alpha < 0$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f' = 0$

b. Soit $k \geqslant 2$,

f étant dérivable sur $[k-1;k]$ le théorème des accroissements finis dit qu'il existe un $c \in [k-1;k]$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(k)-f(k-1)}{k-(k-1)} \qquad \text{ou encore} \qquad f'(c) = f(k)-f(k-1)$$

comme f' est croissante sur $[k-1;k]$ il vient : $f'(c) \leqslant f'(k)$, et ainsi :

$$f(k)-f(k-1) \leqslant f'(k) \qquad \text{ou encore} \qquad k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha} \leqslant \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$$

en multipliant par $\dfrac{1}{1-\alpha}$ (<0) on obtient :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}\right) \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left((k-1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\right)}$$

3) Pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left((k-1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\right) &= 1-n^{1-\alpha} && \textit{(télescopage)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 && \textit{car } 1-\alpha<0\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2}\left((n-1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right) \text{ est convergente}}$$

4) On a montré lorsque $\alpha > 1$ que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\left((n-1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right) & \textit{(à la question 2)b.)}\\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\alpha-1}\left((n-1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right) \text{ est convergente} & \textit{(à la question 3)}\end{cases}$

ce qui entraîne *(théorème de convergence)* que : $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ converge.}}$

or à la question 1) on a montré que si $\alpha \leqslant 1$ alors cette série diverge ;
ce qui permet de conclure par l'équivalence :

$$\boxed{\text{Pour } \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1}$$

Ex 7 : 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2}-S_{2n} = a_{2n+2}-a_{2n+1} \leqslant 0$ car (a_n) est décroissante donc (S_{2n}) est décroissante.
De même, $S_{2n+3}-S_{2n+1} = -a_{2n+3}+a_{2n+2} \geqslant 0$ car (a_n) est décroissante donc (S_{2n+1}) est croissante.
De plus $S_{2n+1}-S_{2n} = -a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
en conclusion :

$$\boxed{\text{les suites } (S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$$

2) Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc elles convergent vers le même réel,
on peut alors en déduire *(suites extraites)* que (S_n) est convergente ou encore :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n \text{ est convergente}}$$

3) (S_{2n+1}) croit et converge vers $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$ et (S_{2n}) décroit et converge vers S

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$,

• l'encadrement de la question 3) donne : $S_{2n+1}-S_{2n} \leqslant S-S_{2n} \leqslant 0$ puis $-a_{2n+1} \leqslant S-S_{2n} \leqslant 0$

$$\text{donc} \qquad |S-S_{2n}| \leqslant a_{(2n)+1}$$

• l'encadrement de la question 3) donne aussi : $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$ puis $0 \leqslant S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1}$

$$\text{donc} \qquad |S - S_{2n+1}| \leqslant a_{(2n+1)+1}$$

La relation demandée est vraie pour les entiers pairs et pour les entiers impairs, elle l'est donc pour tous les entiers naturels.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| \leqslant a_{n+1}}$$