Fiche de révision — Nombres complexes

Définitions

- $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
- Un nombre complexe z s'écrit en **forme algébrique** : $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
- On associe $z = x + iy$ au point $M(x, y)$ du plan complexe.
- Conjugué : $\overline{z} = x - iy$.

Partie réelle / imaginaire

$$\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Module et argument

- Module (distance OM) : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.
- Argument : $\arg(z) = \theta$ tel que $z = |z|\, e^{i\theta}$ (*choix principal* $\theta \in]-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$ selon contexte).
- Relations utiles :

$$|\overline{z}| = |z|, \qquad \arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Forme exponentielle

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

$$\begin{aligned} x + iy &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(forme trigonométrique)},\\ &= r\, e^{i\theta} \quad \text{(forme exponentielle)}, \end{aligned}$$
avec $|z| = r$, $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

Formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Identification

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
  $$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$
- Pour $(r_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $(r_2, \theta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,
  $$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} :\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

Python

- `a+bj`
- pour avoir i il suffit d'écrire `i = 1j`

Opérations

Addition

- $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$
- $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- *(complément)*
  $$e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

Multiplication

- $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
- $(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = (r_1r_2)e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
- $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
- $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}\,.\,\overline{z_2}$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z) \pmod{2\pi}$.

Division

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0)$,
- $\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$
- $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.

Equations

- Pour $z = x + iy$,
  $$z^2 = a + ib \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$
- $z^2 = re^{i\theta} \iff z = \pm\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}$
- Soient a, b, c des réels tels que $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$
  $$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exponentielle d'un complexe

Pour $z = a + ib$,

$$e^z \underset{\text{def}}{=} e^a e^{ib}$$