Feuille-Activité 4 : Nombres complexes, trigonométrie.

Feuille d'activités préparatoires au cours sur les polynômes.

Ex 1 : Ecrire sous forme algébrique : $\dfrac{2}{1+i}$ et $\dfrac{5-2i}{2-3i}$

Ex 2 : Ecrire les nombres complexes suivant sous une forme exponentielle :

$$2-2i\ , \qquad 3+i\sqrt{3}\ , \qquad \left(-1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 , \qquad \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}, \qquad \frac{4-2i}{3+i}, \qquad \frac{3-2i}{2-3i}.$$

Ex 3 : Compléter :

$$\cos(0) = \ .... \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ .... \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \ .... \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ ....$$

$$\tan(0) = \ .... \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ .... \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \ .... \qquad \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ ....$$

$$\cos(2\pi) = \ .... \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ .... \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \ .... \qquad \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \ ....$$

$$\sin(2\pi) = \ .... \qquad \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \ .... \qquad \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \ .... \qquad \tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \ ....$$

Ex 4 : 1) Déterminer les nombres complexes z vérifiant : $z^2 = i$.

2) Déterminer les nombres complexes z vérifiant : $z^2 = 3+4i$.

Ex 5 : Soit $\theta \in]0; 2\pi[$,

1) Déterminer en fonction de n la forme exponentielle de la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

On discutera suivant le signe de $\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)$

2) Simplifier les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

Ex 6 : 1) Montrer les relations suivantes pour tous réels θ et θ' :

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \qquad \text{et} \qquad e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2\,i\,\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

2) En déduire pour $\theta \in [0; 2\pi]$ le module est un argument de : $e^{i\theta}+1$ et $e^{i\theta}-1$

3) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $1+e^{i\frac{\pi}{4}}$; $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Ex 7 : Soit $\theta \in]-\pi; \pi[$,

1) Déterminer en fonction de n la forme exponentielle de la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta}$.

2) Simplifier les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

Ex 8 : 1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Résoudre sur $[0; 2\pi] \cap D_{\tan}$ l'équation suivante : $\tan^2(x) = 1$.

3) Résoudre sur $[-2\pi; 2\pi]$, $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 0$.

Ex 9 : Linéariser les expressions suivantes :

$$\sin^3(x) \qquad \cos^4(x) \qquad \sin^6(x) \qquad \cos^2(x)\sin^3(x)$$

Ex 10 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx$$

Ex 11 : Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos(2x+1)\sin(3x-1)$.
Indication : Utiliser la même technique que la linéarisation pour transformer le produit en somme.

Ex 12 : Montrer que : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$

Ex 13 : 1) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter l'image des solutions dans le plan complexe.

$$(E_2) :\ z^2 = 1 \qquad (E_3) :\ z^3 = 1 \qquad (E_4) :\ z^4 = 1 \qquad (E_5) :\ z^5 = 1$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(E_n) :\ z^n = 1$,
   a. Soit z un nombre complexe vérifiant $z^n = 1$,
   montrer qu'il existe un réel $\theta \in [0; 2\pi[$, tel que $z = e^{i\theta}$
   b. En déduire les solutions de (E_n) sur $\mathbb{C}$.

Ex 14 : Donner l'arccosinus et l'arcsinus des réels suivants :

$$\frac{1}{2} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad -1 \qquad 1$$

Ex 15 : Déterminer l'arctangente des réels suivants :

$$-1 \qquad -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \sqrt{3} \qquad 1 \qquad 0$$

Ex 16 : Calculer les valeurs suivantes :

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \qquad \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \qquad \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

Ex 17 : Montrer que : $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

Ex 18 : Montrer que : $\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Ex 19 : *(Question de cours)*
1) Rappeler la définition de la fonction arctan.
2) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction arctan.
3) Justifier que arctan est dérivable et déterminer sa dérivée.

Ex 20 : On considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin(x)$
❶ Donner l'allure de la courbe représentative de f.
On remarquera que f est la réciproque d'une fonction que l'on précisera.
❷ Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer la dérivée de la fonction f.
❸ En déduire, avec l'Ex 18. que la fonction $x \longmapsto \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa dérivée.
❹ Donner l'allure de la courbe de la fonction $x \longmapsto \arccos(x)$