

Feuille_calcul_3 : Sommes doubles.

Ex 1 : Calculer les sommes suivantes (exprimer les en fonction de n) :

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} i \quad B_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (4i - 3)$$

Ex 2 : Soit n un entier naturel non nul, en remarquant que : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{j}{i+j}$

calculer : $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j}$

Ex 3 : Simplifier les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i j^3 & S_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} i j & S_3 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (i+1) \\ S_4 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2 & S_5 &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \binom{j}{i} & S_6 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j) \end{aligned}$$

Ex 4 : 1) Montrer que $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j) = \sum_{k=1}^n k^2$.

2) Calculer $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i+j)$.

3) En déduire que $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \max(i, j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

Ex 5 : Pour n un entier naturel non nul, on considère les trois sommes :

$$S_0 = \sum_{i=1}^n i 2^i \quad S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j 2^i \quad S_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j 2^i$$

1) Simplifier S_0 en utilisant $i 2^i = \sum_{j=1}^i 2^i$.

2) Simplifier S_1 .

3) Simplifier S_2 .

4) Classer dans l'ordre croissant les trois entiers S_0 , S_1 et S_2

Ex 6 : Calculer la somme suivante :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-j}$$

Ex 7 : Calculer les sommes :

$$\sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{3}\right)^i \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} 3^k\right) \quad \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{3}\right)^i \left(\sum_{k=i}^n \binom{n}{k} 3^k\right)$$

Ex 8 : Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \{1, \dots, n\}$, montrer que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$$