Correction de la feuille-Activité 4 : Nombres complexes, trigonométrie.

Ex 1 : *Juste les réponses :* $\boxed{\dfrac{2}{1+i} = 1 - i}$ $\boxed{\dfrac{5-2i}{2-3i} = \dfrac{16}{13} + \dfrac{11}{13}\, i}$

Ex 2 : • $|2-2i| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 2-2i &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{2-2i = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

• $|3+i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 3+i\sqrt{3} &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right) \\ &= 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\boxed{3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

• $\left|-1+i\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| = \sqrt{1+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \left(-1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)\right)^6 \\ &= \frac{64}{27}\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 \\ &= \frac{64}{27}\, e^{5i\pi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(-1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 = \frac{64}{27}\, e^{i\pi}}$$

Remarque : C'est égal à $-\dfrac{64}{27}$ mais ce n'est plus une forme exponentielle.

• $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\, e^{i\frac{\pi}{6}}}$ donc $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}$

$$\boxed{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

• $\dfrac{4-2i}{3+i} = \dfrac{(4-2i)(3-i)}{9+1}$ donc $\dfrac{4-2i}{3+i} = 1 - i$

$$\boxed{\frac{4-2i}{3+i} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

• $|3-2i| = |2-3i|$ donc $\left|\dfrac{3-2i}{2-3i}\right| = 1$

de plus $-\arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)$ est un argument de $3-2i$ et $-\arctan\left(\dfrac{3}{2}\right)$ est un argument de $2-3i$

Remarque : ‘ Si $a>0$ alors $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ est un argument de $a+ib$.

donc $-\arctan\left(\dfrac{2}{3}\right) + \arctan\left(\dfrac{3}{2}\right)$ est un argument de $\dfrac{3-2i}{2-3i}$

Une autre expression de cet argument :

$\dfrac{3-2i}{2-3i} = \dfrac{1}{13}(12+5i)$ donc $\arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)$ est un argument de $\dfrac{3-2i}{2-3i}$

$$\boxed{\frac{3-2i}{2-3i} = \exp\left(i\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)}$$

Remarque : en justifiant que :$-\arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)+\arctan\left(\dfrac{3}{2}\right)$ et $\arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)$ sont entre $[0;2\pi[$ on peut en déduire l'égalité :

$$-\arctan\left(\frac{2}{3}\right)+\arctan\left(\frac{3}{2}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

Ex 3 :

$$\cos(0)=1 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\tan(0)=0 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \qquad \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$$

$$\cos(2\pi)=1 \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \qquad \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(2\pi)=0 \qquad \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1 \qquad \tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : 1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k \\
&= \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \qquad\qquad (\text{ car } e^{i\theta}\neq 1\ ) \\
&= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{i\frac{n\theta}{2}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout Soit } \theta\in]0;2\pi[, \quad \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\, e^{i\frac{n\theta}{2}}}$$

Si $\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)\geqslant 0,$ alors :

Le module de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ est $\dfrac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ et $\dfrac{n\theta}{2}$ est un argument de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

Si $\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)\leqslant 0,$ alors :

Le module de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ est $\dfrac{-\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ et $\dfrac{n\theta}{2}+\pi$ est un argument de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ e^{i\frac{n\theta}{2}}$ donc en prenant la partie réelle et la partie imaginaire il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\ \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Ex 6 : 1)

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{i\theta'} &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times \left(2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\ e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{i\theta'} &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times \left(2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\ e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

2) En utilisant le résultat de la propriété précédente on obtient : $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ e^{i\frac{\theta}{2}}$

donc $\left|e^{i\theta}+1\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$

et si $\theta \in [0;\pi]$ alors l'argument principal (dans $[0;2\pi]$) de $e^{i\theta}+1$ est égal à : $\frac{\theta}{2}$

si $\theta \in [\pi;2\pi]$ alors l'argument principal (dans $[0;2\pi]$) de $e^{i\theta}+1$ est égal à : $\pi + \frac{\theta}{2}$

En utilisant le résultat de la propriété précédente on obtient : $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ e^{i\frac{\theta}{2}}$

donc $\left|e^{i\theta}-1\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$

et si $\theta \in [0;\pi]$ alors l'argument principal (dans $[0;2\pi]$) de $e^{i\theta}-1$ est égal à : $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$

si $\theta \in [\pi;2\pi]$ alors l'argument principal (dans $[0;2\pi]$) de $e^{i\theta}-1$ est égal à : $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$

3) (*Nous allons donner une forme exponentielle*).
Remarque : On peut utiliser les formules précédentes ou refaire le même raisonnement.

$$1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = 2\,i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Ex 7 : *(non corrigé)*

Ex 8 : *(non corrigé)*

Ex 9 : *(non corrigé)*

Ex 10 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\,dx \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{4}}$$

Commençons par une linéarisation :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{(2)^3}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix})\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2\cos(3x)+6\cos(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)\right)\,dx \\
&= \left[\frac{3}{4}\sin(x)+\frac{1}{12}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)-0
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{2}{3}}$$

Ex 11 : *(non corrigé)*

Ex 12 : *(non corrigé)*

Ex 13 : 1) $z^2=1 \iff (z-1)(z+1)=0$ donc $\boxed{S_2=\{-1;1\}}$

$z^3=1 \iff (z-1)(z^2+z+1)=0$ donc $\boxed{S_3=\{1\,;\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,;\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}}$

$z^4=1 \iff (z^2-1)(z^2+1)=0 \iff (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0$ donc $\boxed{S_4=\{1\,;\,-1\,;\,i\,;\,-i\}}$

2) a. Soit z un nombre complexe vérifiant $z^n=1$,

On sait que $z^n=1$ donc $|z^n|=1$ ou encore $|z|^n=1$ et comme $|z|\in\mathbb{R}_+$ il vient, $|z|=1$

or on sait que tous les nombres complexes s'écrivent $z=|z|e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0;2\pi[$.

$$\boxed{\text{Si } z^n=1 \text{ alors il existe } \theta\in[0;2\pi[\text{ tel que } z=e^{i\theta}}$$

(Cette question est une analyse, la synthèse est faite à la question suivante)

b. Soit $\theta\in[0;2\pi[$, on note $z=e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
z^n=1 &\iff e^{i\,n\theta}=e^{i\,0} \\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z} :\ n\theta = 0+2k\pi \\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z} :\ \theta=\frac{2k\pi}{n} \\
&\iff \exists k\in[\![0;n-1]\!] :\ \theta=\frac{2k\pi}{n} \qquad \textit{(car } \theta\in[0;2\pi[\,\textit{)} \\
&\iff \exists k\in[\![0;n-1]\!] :\ z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ \middle|\ k\in[\![0;n-1]\!]\right\}}$$

Ces solutions sont appelées les racines nième de l'unité.

Ex 14 :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \left(\textit{en effet} \ : \ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \ \ \textit{et} \ \ \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \left(\textit{en effet} \ : \ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \ \ \textit{et} \ \ \frac{\pi}{3} \in [0\,;\pi]\right)$$

a	$\arcsin(a)$	$\arccos(a)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	π
1	$\frac{\pi}{2}$	0

Ex 15 :

a	$\arctan(a)$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$
0	0

La suite n'est pas corrigée