Colles de mathématiques - Semaine 1 - du 22/09/25

La colle commencera par une ou deux questions de cours sur le modèle des questions données au verso de cette page. Les démonstrations du cours pourront être demandés en exercice si le reste est bien maitrisé.

- **Révisions suites numériques.**

  Suites usuelles. Limites d'une suite réelle.

  Passage à la limite sur une égalité ou sur une inégalité large. Théorèmes de comparaison.

  Croissances comparées des suites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ $(a > 1$ et $\alpha > 0)$. Recherche d'équivalents.

  Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ *(aucun résultat n'est au programme, on redémontre tout)*

- **Révisions : Nombres complexes et trigonométrie.**

  Forme algébrique d'un nombre complexe. Représentation graphique. Affixe d'un point ou d'un vecteur.
  Conjugué, module, arguments. Interprétation graphique.
  Ecriture exponentielle. Notation $e^{i\theta}$, propriétés. Formule d'Euler. Linéarisation.
  Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.
  Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations $z^2 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.
  Propriétés de $\cos(\theta)$, de $\sin(\theta)$ et de $\tan(\theta)$. Périodicités et symétries.
  Formules de trigonométrie : $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
  Résolution d'équations trigonométriques simples. $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$ et $a\cos(\varphi) + b\sin(\varphi) = c$
  Transformation de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$.
  Notation arcsin et arccos. Fonction arctan.

- **Révisions sur les sommes.**

  Révisions sur les sommes. Changement d'indice (*decalage, inversion*). Télescopage.

  Sommes usuelles. *(géométriques, arithmétiques)*

  Propriété de linéarité. Inégalité triangulaire.

  Sommes doubles. Inversion de l'ordre de sommation.

- **Séries numériques.**

  Notation. Série $\sum\limits_{n\geqslant m} u_n$, sommes partielles $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k$ et en cas de convergence la somme $\sum\limits_{k=m}^{+\infty} u_k$.

  Définition de : "La série $\sum u_n$ est convergente" et définition de "$\sum u_n$ est absolument convergente".

  Séries usuelles : $\sum \dfrac{1}{n}$ $\sum \dfrac{1}{n^2}$ $\sum q^n$ $\sum nq^{n-1}$ $\sum n(n-1)q^{n-2}$ $\sum \dfrac{x^n}{n!}$

  La nature des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ n'est pas au programme de BCPST.

  Valeur de la somme des séries géométriques, géométriques dérivées (d'ordre 1 ou 2), exponentielles. *(démonstrations faites en classe)*

  Condition nécessaire de convergence : si $\sum u_n$ est convergente alors (u_n) converge vers 0. (*Démonstration*)

  Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge.
  Théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs. *(démonstration faite en classe)*
  Théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs. *(démonstration faite en classe)*
  Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. *(démonstration faite en classe)*
  Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est commutativement convergente. *(admis)*

  Le théorème des séries alternées n'est pas au programme.

- **Python.**

  Etude de suites. Calcul de sommes.

  Méthode des rectangles.

  Représentation graphique avec et sans `numpy`. *(comprendre comment faire une subdivision d'un segment $[a, b]$)*

Exemples de questions de cours :

La colle commencera par un exercice simple d'application d'un des deux théorèmes de convergence.

L'utilisation d'un théorème (quel qu'il soit) est rarement bien assimilée.

- Démonstration de la convergence de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ ou de la divergence de $\sum \dfrac{1}{n}$.
- Convergence et somme d'une série géométrique *(Enoncé et démonstration)*
- Donner la somme d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 (ou 2) de raison $q \in]-1,1[$.
- Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, énoncer la définition de : La série $\sum u_n$ est convergente.
- Calcul de suites équivalentes simples, de fonctions équivalentes. *(Pas de DL)*
- Calcul de sommes finies.
- Nature d'une série.
- Calcul de la somme d'une série convergente.
- Enoncé du théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs.
- Enoncé du théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs.
- Utilisation du théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs.
- Utilisation du théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs.
- Etude de la convergence absolue d'une série.
- Ecrire un programme python permettant de représenter les termes d'une suite.
- Ecrire un programme python permettant de tracer une courbe sans `numpy`.
- Ecrire un programme python permettant d'estimer une intégrale en utilisant la méthode des rectangles.
- Calcul d'une limite d'une somme de Riemann *(à ne pas confondre avec les séries de Riemann)*
- Comparaison somme/intégrale pour établir la nature d'une série.