Fiche de révision — Polynômes réels

Définition

- Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un polynôme si on peut trouver des réels a_0, ..., a_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
- On note : $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
- C'est la somme des monômes : $x \longmapsto a_k x^k$
- Cas particuliers : Polynôme nul, polynômes constants, fonctions affines.

Opérations

- Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.
- Polynôme dérivé.
$$P' : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$
- *Complément*
Coefficients du produit de deux polynômes.
$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad Q : x \longmapsto \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$
$$P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)}_{\text{coefficients de } P \times Q} x^k$$
- **Théorème** *(Intégrité).*
$$P \times Q = 0 \iff P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0$$

Unicité de l'écriture

- Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont mêmes coefficients.
- Tout polynôme P non nul s'écrit de manière unique sous la forme :
$$P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0$$
- Sous cette forme :
n est le degré de P,
a_n est le coefficient dominant.
$x \longmapsto a_n x^n$ est le monôme dominant.
a_0 est le terme constant.

Degré

- **Définition** :
si $P = 0$ alors $\deg(P) = -\infty$
si $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$
alors $\deg(P) = n$
- $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P); \deg(Q)\}$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P^m) = m \deg(P)$
- Si $\deg(P) \geq 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$

Racines

- **Définition** :
α est une racine de P signifie que : $P(\alpha) = 0$
- **Théorème** *(Racine et factorisation).*
Si α racine de P alors il existe un polynôme Q tel que
$$P : x \longmapsto (x - \alpha) Q(x)$$
- Si P possède n racines distinctes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors il existeun polynôme Q tel que :
$$P : x \longmapsto (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) Q(x)$$
- Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
- Polynôme de degré impair.
Si P est un polynôme réel de degré impair alors P possède au moins une racine réelle.
- Si P possède n racines distinctes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\deg(P) = n$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$P : x \longmapsto \lambda (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

Racines multiples.

- **Définition.**
α est une racine de P d'ordre de multiplicité m signifie qu'il existe un polynôme Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - \alpha)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$
- **Théorème** *Lien avec le polynôme dérivé.*
α est une racine multiple de P si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.