

Ex 1 : (*Question de cours*)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Démontrer que : si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$

Ex 2 : Pour chaque fonction polynômiale définie par les expressions ci-dessous, déterminez les racines réels et donnez une forme factorisée (*répondez dans l'ordre que vous voulez*) .

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 - x - 1 & P_2(x) &= 2x^2 + x - 1 & P_3(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \\ P_4(x) &= 3x^2 + 2x & P_5(x) &= x^4 - 3x^2 - 10 & P_6(x) &= 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 \end{aligned}$$

Ex 3 : Quel est le degré des fonctions polynômiales définies par les expressions suivantes ?

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x+2)^6 - (x^2+4)^3 & P_2(x) &= (-2+3x+x^2)^3(4x+5)^2 \\ P_3(x) &= \prod_{k=0}^n (x-k) & P_4(x) &= \prod_{k=1}^n (2^k - x)^k & P_5(x) &= \sum_{k=1}^{10} x^k (1-x)^{10-k} \end{aligned}$$

Ex 4 : On considère les deux fonctions polynômiales :

$$P : x \mapsto (-x+3)^7 + x^7 + (x^2+3)^3 \quad Q : x \mapsto (2(x^3-1)(x^2-2)-x^4)^3 - 4(x+5)^9$$

- 1) Quel est le degré des polynômes P et Q ?
- 2) Quel est le coefficient dominant des polynômes P et Q ?
- 3) Quel est le terme constant des polynômes P et Q ?
- 4) Quel est le monôme de degré 1 des polynômes P et Q ?

Ex 5 : Factoriser (*le plus possible*) la fonction polynômiale suivante en remarquant que $P(2) = P(4) = 0$:

$$P : x \mapsto 3x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 18x + 24$$

Ex 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

montrer que $P_n : x \mapsto (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1$ est factorisable par $Q : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

Ex 7 : Montrer que la fonction exponentielle n'est pas une fonction polynômiale.

On pourra raisonner par l'absurde.

Ex 8 : (*Question de cours*)

Soit P une fonction polynômiale réelle dont le degré est un entier impair.

Démontrer que P a au moins une racine réelle.

Ex 9 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et T_n une fonction polynômiale telle que

$$\deg(T_n) = n \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$$

Déterminer les racines des polynômes T_n .

Ex 10 : Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k e^{kx} = 0$

Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = 0$.

Ex 11 : (*Question de cours*)

Soient P un polynôme réel et α une racine réelle de P .

Démontrer que α est une racine multiple si, et seulement si, $P'(\alpha) = 0$.

Ex 12 : Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, montrer que :

- 1) P est paire si, et seulement si, pour tout k tel que $(0 \leq 2k+1 \leq n)$ on a : $a_{2k+1} = 0$
- 2) P est impaire si, et seulement si, pour tout k tel que $(0 \leq 2k \leq n)$ on a : $a_{2k} = 0$

Ex 13 : Déterminer toutes les fonctions polynômiales P vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$.