BCPST2$_A$ *(Lundi 22 septembre 2025)*

Nom :
Prénom :

Interrogation **(Sujet B)** (25 minutes)

Le barème est donné à titre indicatif.

Complétez les phrases, les égalités suivantes ou répondez aux questions.

Donnez la forme exponentielle avec un argument dans $]-\pi,\pi]$ des nombres complexes suivants :

$-1-i=$............... $-2=$................. $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=$................. $\sqrt{3}+3i=$........................

/$2pt$

Rédiger *(comme en classe : $\Longleftrightarrow$, $\exists$, conclusion)*, la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $\sin(x)=-\frac{1}{2}$.

/$3pt$

On note $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$,

Simplifier :

$j^3=$....................... et $1+j+j^2=$.......................

/$2pt$

VRAI - FAUX

$+\frac{1}{2}$ pour une réponse correcte et $-\frac{1}{2}$ pour une erreur *(Attention : il est parfois préférable de ne pas répondre)*

Vous devez justifier en quelques mots ou un petit dessin ($\times 2$).

1) **Affirmation** : $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

Vrai ☐ Faux ☐ **En effet :**..

2) **Affirmation** : $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\pi-\theta)=\cos(\theta)$

Vrai ☐ Faux ☐ **En effet :**..

3) **Affirmation** : $\exists\theta\in\mathbb{R},\quad \sin(-\theta)=\sin(\theta)$

Vrai ☐ Faux ☐ **En effet :**..

4) **Affirmation** : $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$

Vrai ☐ Faux ☐ **En effet :**..

/$\pm 4pt$

Donner la formule donnant $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

$$\cos(2x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En déduire $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$

$$\cos^2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$/_{2pt}$

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels.

Compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} u_{i,j} = \sum_{j=\ldots}^{\ldots}\sum_{i=\ldots}^{\ldots} u_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{i,j} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} u_{i,j} + \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$/_{3pt}$

• Montrer que tous réels θ et θ' : $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\ \cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

....

....

....

• **Application :** Donner une forme exponentielle des complexes suivants :

$$e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$/_{4pt}$

VRAI - FAUX

$+1$ pour une réponse correcte et -1 pour une erreur *(Attention : il est parfois préférable de ne pas répondre)*

Ici on demande pas de justification

Dans toutes les questions suivantes, la lettre n désigne un entier naturel quelconque.

1) **Affirmation** : $\forall q \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ Vrai ☐ Faux ☐

2) **Affirmation** : $\forall q \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-q^2}{q-1}$ Vrai ☐ Faux ☐

3) **Affirmation** : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i^2+1)2^j = \left(\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\sum_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ☐ Faux ☐

4) **Affirmation** : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)2^i = \left(\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\sum_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ☐ Faux ☐

5) **Affirmation** : $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(i^2+1)2^i = \left(\prod_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\prod_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ☐ Faux ☐

$/_{\pm 5pt}$