BCPST2$_A$ *(Lundi 22 septembre 2025)* Nom :
Prénom :

Correction de l'interrogation **(Sujet A)** (25 minutes)

Le barème est donné à titre indicatif.

Complétez les phrases, les égalités suivantes ou répondez aux questions.

Donnez la forme exponentielle avec un argument dans $]-\pi,\pi]$ des nombres complexes suivants :

$$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad -2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad 3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

/2pt

Rédiger *(comme en classe : $\iff$, $\exists$, conclusion)*, la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \sin(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}:\ x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ou \quad x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{4}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

/3pt

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels.

Compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}u_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}u_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{i,j}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}u_{i,j}+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}u_{i,j}+\sum_{i=1}^{n}u_{i,i}$$

/3pt

• Montrer que tous réels θ et θ' : $e^{i\theta}+e^{i\theta'}=2\ \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

$$\begin{aligned}e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\times\left(2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right) &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\times\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)\\ &= e^{i\theta}+e^{i\theta'}\end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i\theta}+e^{i\theta'}=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\ e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

• **Application :** Donner une forme exponentielle des complexes suivants :

$$e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}=2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad 1+e^{i\frac{\pi}{4}}=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$$

/4pt

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$,
Simplifier :

$$j^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1 + j + j^2 = 0$$

$/_{2pt}$

Donner la formule donnant $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$.

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

En déduire $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$/_{2pt}$

VRAI - FAUX
$+\frac{1}{2}$ pour une réponse correcte et $-\frac{1}{2}$ pour une erreur *(Attention : il est parfois préférable de ne pas répondre)*
Vous devez justifier en quelques mots ou un petit dessin ($\times 2$).

1) **Affirmation** : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

Vrai ☐ Faux ■ **En effet :** En prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$ l'égalité est fausse.

2) **Affirmation** : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

Vrai ■ Faux ☐ **En effet :** Petit dessin : symétrie par rapport à Oy

3) **Affirmation** : $\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(-\theta) = -\cos(\theta)$

Vrai ■ Faux ☐ **En effet :** En prenant $\theta = 0$.

4) **Affirmation** : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$

Vrai ■ Faux ☐ **En effet :** Petit dessin : symétrie par rapport à $\Delta : y = x$

$/_{\pm 4pt}$

VRAI - FAUX
$+1$ pour une réponse correcte et -1 pour une erreur *(Attention : il est parfois préférable de ne pas répondre)*
Ici on demande pas de justification
Dans toutes les questions suivantes, la lettre n désigne un entier naturel quelconque.

1) **Affirmation** : $\forall q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=2}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - q^2}{q - 1}$ Vrai ■ Faux ☐

2) **Affirmation** : $\forall q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ Vrai ☐ Faux ■

3) **Affirmation** : $\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)2^i = \left(\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\sum_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ☐ Faux ■

4) **Affirmation** : $\prod_{i=0}^{n}(i^2+1)2^i = \left(\prod_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\prod_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ■ Faux ☐

5) **Affirmation** : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i^2+1)2^j = \left(\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\sum_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ■ Faux ☐

$/_{\pm 5pt}$