BCPST2$_A$ *(Lundi 22 septembre 2025)* Nom :
Prénom :

Correction de l'interrogation **(Sujet B)** (25 minutes)

Le barème est donné à titre indicatif.

Complétez les phrases, les égalités suivantes ou répondez aux questions.

Donnez la forme exponentielle avec un argument dans $]-\pi,\pi]$ des nombres complexes suivants :

$$-1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \qquad -2=2e^{i\pi} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad \sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

/2pt

Rédiger *(comme en classe : $\iff$, $\exists$, conclusion)*, la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $\sin(x)=-\dfrac{1}{2}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(x)=-\frac{1}{2} &\iff \sin(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}:\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

/3pt

On note $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$,

Simplifier :

$$j^3=1 \qquad \text{et} \qquad 1+j+j^2=0$$

/2pt

VRAI - FAUX

$+\dfrac{1}{2}$ pour une réponse correcte et $-\dfrac{1}{2}$ pour une erreur *(Attention : il est parfois préférable de ne pas répondre)*

Vous devez justifier en quelques mots ou un petit dessin ($\times 2$).

1) **Affirmation** : $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

Vrai ■ Faux ☐ **En effet :** on développe avec $\cos(a+b)=...$

2) **Affirmation** : $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\pi-\theta)=\cos(\theta)$

Vrai ☐ Faux ■ **En effet :** En prenant $\theta=0$.

3) **Affirmation** : $\exists\theta\in\mathbb{R},\quad \sin(-\theta)=\sin(\theta)$

Vrai ■ Faux ☐ **En effet :** En prenant $\theta=0$.

4) **Affirmation** : $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$

Vrai ■ Faux ☐ **En effet :** Petit dessin : symétrie par rapport à $\Delta : y=x$

/±4pt

Sujet B

Donner la formule donnant $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

En déduire $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$$

$/_{2pt}$

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels.
Compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} u_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{i,j} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} u_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} u_{i,i}$$

$/_{3pt}$

• Montrer que tous réels θ et θ' : $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\ \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times \left(2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right) &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) \\ &= e^{i\theta} + e^{i\theta'} \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\ e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

• **Application :** Donner une forme exponentielle des complexes suivants :

$$e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{i\frac{7\pi}{24}} \qquad 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$/_{4pt}$

VRAI - FAUX

$+1$ pour une réponse correcte et -1 pour une erreur *(Attention : il est parfois préférable de ne pas répondre)*

Ici on demande pas de justification

Dans toutes les questions suivantes, la lettre n désigne un entier naturel quelconque.

1) **Affirmation** : $\forall q \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\quad \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ Vrai ☐ Faux ■

2) **Affirmation** : $\forall q \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\quad \sum_{k=2}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-q^2}{q-1}$ Vrai ■ Faux ☐

3) **Affirmation** : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i^2+1)2^j = \left(\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\sum_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ■ Faux ☐

4) **Affirmation** : $\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)2^i = \left(\sum_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\sum_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ☐ Faux ■

5) **Affirmation** : $\prod_{i=0}^{n}(i^2+1)2^i = \left(\prod_{i=0}^{n}(i^2+1)\right)\left(\prod_{i=0}^{n}2^i\right)$ Vrai ■ Faux ☐

$/_{\pm 5pt}$