Correction feuille_Calculs_3 : Sommes doubles.

Ex 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times n\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\frac{n^2(n+1)}{2}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (4i-3) &= 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i \;-\; 3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1\\ &= 4\sum_{i=1}^{n} ni \;-\; 3\,n^2\\ &= 4n\sum_{i=1}^{n} i \;-\; 3\,n^2\\ &= 4n\,\frac{n(n+1)}{2} \;-\; 3\,n^2\end{aligned}$$

$$\boxed{B_n=n^2(2n-1)}$$

Ex 2 : La remarque vient du fait que i et j sont des variables muettes, on peut permuter leur nom.

$$\begin{aligned}2S &= S \;+\; S\\ &= \sum_{1\leqslant i;j\leqslant n}\frac{i}{i+j} \;+\; \sum_{1\leqslant i;j\leqslant n}\frac{j}{i+j}\\ &= \sum_{1\leqslant i;j\leqslant n}\frac{i+j}{i+j}\\ &= \sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} 1\\ &= n^2\end{aligned}$$

$$\boxed{S=\frac{n^2}{2}}$$

Ex 3 : S_1

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\,j^3 &= \sum_{i=1}^{n} i\,\sum_{j=1}^{n} j^3\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^3\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\,j^3 \;=\; \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3}$$

S_2

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\,\frac{(j-1)j}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^3-j^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(2n+1)}{3}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} \\
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \frac{n(n+1)(3n+2)(n-1)}{24}
\end{aligned}$$

S_3

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(i+1) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(j-1)\frac{2+j}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j-2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-2n\right) \\
&= \frac{n}{12}\left(2n^2+6n-8\right) \\
&= \frac{n}{6}\left(n^2+3n-4\right) \\
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(i+1) &= \frac{n}{6}\left(n-1\right)\left(n+4\right)
\end{aligned}$$

S_4

$$\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n}(i+j)^2 = \sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} j^2$$

or on peut échanger les indices i et j donc : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} i^2 = \sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} j^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n}(i+j)^2 &= 2\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} ij \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} n\,i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j \\
&= 2n\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\,\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n}(i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}}$$

Pour S_5.
Les fans du triangle de Pascal savent que la somme des termes de la ligne associée à j vaut 2^j donc :

$$\sum_{0\leqslant i;j\leqslant n}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}2^j$$

$$\boxed{\sum_{0\leqslant i;j\leqslant n}\binom{j}{i}=2^{n+1}-1}$$

On peut aussi faire des calculs. :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i;j\leqslant n}\binom{j}{i} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{j}{i}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\\ &= \sum_{j=0}^{n}2^j\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{0\leqslant i;j\leqslant n}\binom{j}{i}=2^{n+1}-1}$$

S_6 **Méthode 1 :**

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\min(i,j)=\underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min(i,j)}_{\text{strict. au dessus}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\min(i,i)}_{\text{la diagonale}}+\underbrace{\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\min(i,j)}_{\text{strict. au dessus}}$$

et comme $\min(i,j)=\min(j,i)$,

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\min(i,j)=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min(i,j)+\sum_{i=1}^{n}\min(i,i)$$

ce qui donne : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\min(i,j)=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}i+\sum_{i=1}^{n}i$

or : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}i=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)j}{2}$ donc :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\min(i,j)=2\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)j}{2}+\sum_{j=1}^{n}j$$

En conclusion :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

S_6 **Méthode 2 :** On peut utiliser aussi un télescopage en commençant par calculer $S_{n+1}-S_n$.
En étudiant le tableau associé aux $\min(i,j)$ on a :

$$S_{n+1}-S_n=1+\cdots+n+(n+1)+1+\cdots+n=(n+1)+2\sum_{k=1}^{n}k=(n+1)^2$$

Par télescopage on obtient alors :

$$S_n-S_1=\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2=\sum_{k=2}^{n}k^2$$

et comme $S_1 = 1$, on retrouve bien :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

S_6 **Méthode 3 :** *(C'est ce que proposait Owen).*

$$\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i \right)$$

S_6 **Méthode 4 :** *(En obsevant le tableau donnant* $\min(i,j)$*).*

$$\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=k}^{n} k \times (2n-2k+1)$$

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : 1)

$$\begin{aligned}
S_0 &= \sum_{i=1}^{n} i2^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \ \frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(2^{n+1} - 2^j\right) \\
&= n2^{n+1} - 2 \ \frac{1-2^n}{1-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_0 = (n-1)2^{n+1} + 2}$$

2)

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j \, 2^i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \\
&= \left(2 \frac{2^n - 1}{2-1} \right) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_1 = n(n+1)(2^n - 1)}$$

3)

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j\,2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} j\,2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\,2^j\,\frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\,(2^{n+1}-2^j) \\
&= 2^{n+1}\sum_{j=1}^{n} j - S_0 \\
&= 2^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} - (n-1)2^{n+1} - 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_2 = 2^n(n^2-n+2)-2}$$

4) Les trois entiers S_0 S_1 et S_2, sont des sommes des coefficients de la matrice $M = \left(j\,2^i\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$

M est une matrice d'entiers strictement positif,

de plus S_0 est la somme des coefficients diagonaux, S_1 de tous les coefficients et S_2 des coefficients sur et en dessous de la diagonale, donc :

$$\boxed{S_0 < S_2 < S_1}$$

La suite n'est pas corrigée.