

Définition (*Polynôme*)

Ex 1 : (*Vocabulaire*) Donner le degré, le terme constant et le monôme dominant des polynômes suivants :

$$P_1 = 2 - X + 3X^3 \quad P_2 = (X + 1)^6 - X^6 \quad P_3 = ((1 + i)X^2 + X - 2i)^3 \quad P_4 = 2X + 8X^3 + 3X^2$$

Ex 2 : (*Identification*). Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :

$$X^3 + X^2 - 4X + 6 = (X - (1 + i))(aX^2 + bX + c)$$

Ex 3 : (*Opérations*). On note : $P = X - 3$, $Q = 2$ et $R = X^2 + X + 5$

Donner une forme développée des polynômes suivants

$$\begin{array}{cccccc} P(X) - 2R(X) & P^2 & P(X)Q(X) & P(X)R(X) & (X + 1)P(X) & \\ P(X + 1) & P \times (X + 1) & Q(P) & R(P(X)) & R(P(X)) & \end{array}$$

Définition (*degré d'un polynôme*)
Théorème (*degré et opérations*)

Ex 4 : Donner le degré des polynômes suivant :

$$P_1 = 2 + X + X^4 \quad P_2 = (X + 2)(5X^2 - 3) \quad P_3 = (4X + 2)^3(1 + X)^2 \quad P_4 = (X + 2)^2 - (X^2 - 3)$$

Théorème (*Intégrité*)

- Ex 5 :**
- 1) Démontrer ce théorème. (*Indication : il suffit de montrer que si P et Q sont non nuls alors PQ est non nul*)
 - 2) a. Déterminer les polynômes P vérifiant : $P - 2XP = 2X^2 + X - 1$.
b. Même question avec l'équation : $P^2 + 2XP = 1 + 2X$. (*Même idée que la forme canonique*)
 - 3) Donner deux suites non nulles (u_n) et (v_n) (*différentes de la suite nulle*) telles que le produit $(u_n)(v_n)$ est la suite nulle.
 - 4) Donner deux matrices non nulles A et B qui sont telles que le produit AB est nulle.

Définition (*Racine d'un polynôme*)

Théorème (*Racine et factorisation*)

Ex 6 : 1) Démontrer le théorème. avec les indications suivantes :

- ❶ Commencer par justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^k - \alpha^k = (X - \alpha)Q_k(X)$
- ❷ Ecrire $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et calculer $P(X) - P(\alpha)$.

2) Enoncer la généralisation de ce théorème avec m racines distinctes.

Théorème (*Nombre de racines d'un polynôme.*)

Ex 7 : 1) Soit P est un polynome de degré $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(k) = 0$ et $P(0) = 1$.

Déterminer une forme factorisée de P .

2) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(3t) = P(\cos(t))$.

(on traitera séparément l'existence et l'unicité)

Définition (*Racines multiples. Multiplicité.*)

Ex 8 : 1) Déterminer l'ordre de multiplicité de chaque racine de $P = 2(X + 3)^2(2X - 1)(2X + 6)$

2) Factoriser $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$ sachant que 2 est une racine multiple.

Théorème (*Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels*)

Ex 9 : 1) Démontrer ce théorème.

2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + X - 3$ en remarquant que $P(i) = 0$

3) On note $P = X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 22X + 12$.

Trouver toutes les racines de P sachant que $1 + i$ en est une.

Théorème (*Théorème de D'Alembert-Gauss.*)

Ex 10 : 1) On note $P = X^4 + 1$, déterminer les racines réelles de P , déterminer les racines de P .

2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynome $X^4 - 2X^2 + 1$.