Correction de la feuille_Act_5 : Fonctions polynomiales réelles.

Ex 1 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

La fonction f est de classe C^∞ et

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad f^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} a_k x^{k-p}$$

donc

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad f^{(p)}(0) = p!\, a_p$$

ici on suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ on a donc $\forall p \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(x) = 0$
et ainsi $f^{(p)}(0) = 0$, ce qui entraîne bien $\forall p \in [\![0, n]\!],\ a_p = 0$

$$\boxed{\text{si } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \text{ alors } \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0}$$

Ex 2 :

- $P_1(x)$ a pour discriminant $\Delta = 5$ donc les racines de P_1 sont : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

  et $\quad P_1(x) = \left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

- -1 est une racine évidente, $P_2(x) = (x+1)(2x-1)$ et les racines de P_2 sont : -1 et $\dfrac{1}{2}$

- $P_3(x) = \dfrac{1}{4}\left(2x^2 + x - 3\right)$

1 est une racine évidente, $P_3(x) = \dfrac{1}{4}(x-1)(2x+3)$ et les racines de P_3 sont : 1 et $-\dfrac{3}{2}$

- $P_4(x) = 3x\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$ et les racines de P_4 sont : 0 et $-\dfrac{2}{3}$

- $P_5(x) = (x^2+2)\left(x^2 - 5\right)$ et les racines *(réelles)* de P_5 sont : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$

- $P_6(x) = 2x^2(x^2 + x + 1)$ et la seule racine *(réelle)* de P_6 est : 0

  En effet : Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant strictement inférieur à zéro donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : *(Fait au tableau, non corrigé ici)*
Dans $\mathbb{R}[X]$, $P(X) = 3(X^2+1)(X-2)(X-4)$ et dans $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = 3(X-i)(X+i)(X-2)(X-4)$

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : Montrons par l'absurde que $f : x \longmapsto e^x$ n'est pas un polynôme.

Supposons connaître un entier n et des réels a_0, ..., a_n tels que $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$.

- d'une part $f : x \longmapsto e^x$ donc f est C^∞ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = e^x$
- d'autre part $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = 0$

C'est impossible car $x \mapsto e^x$ n'est pas la fonction nullle.
En conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction exponentielle n'est pas polynomiale}}$$

Ex 8 : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que n est impaire et $a_n \neq 0$

On note : f la fonction $x \longmapsto P(x)$.

Discutons suivant le signe de a_n :

- si $a_n > 0$, on a : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}$

  donc *(Th. des valeurs intermédiaires)* f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$

- si $a_n < 0$, on a : $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}$

  donc (TVI) f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, il existe un réel } x \text{, tel que : } P(x) = 0}$$

Ex 9 : • Pour $n = 0$, $T_0 = 1$ donc T_0 n'a pas de racine.

• On fixe n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(t)) = \cos(nt) \quad \text{donc } \forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = 0$$

Or la fonction cos est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ donc pour $k \in [\![0; n-1]\!]$ les réels : $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ sont distincts,

on a donc trouver n racines distinctes de $T_n(X)$, mais on sait aussi que le degré de T_n est égal à n donc on a toutes les racines de T_n.

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } T_n \text{ est } \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}}$$

Ex 10 : *(non corrigé)*

Ex 11 : α est une racine de P, on note R une fonction polynomiale telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - \alpha)R(x)$

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $P : x \mapsto P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[x]$.

(on suppose que α est une racine multiple)

on a alors pour $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x)$ d'où $P'(\alpha) = 0$ ■

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $P'(\alpha) = 0$.

Comme $P(x) = (x - \alpha)R(x)$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = R(x) + (x - \alpha)R'(x)$,

on en déduit que : $P'(\alpha) = R(\alpha)$,

de plus par hypothèse $P'(\alpha) = 0$ donc $R(\alpha) = 0$ et ainsi $R : x \longmapsto (x - \alpha)Q(x)$ où $Q \in \mathbb{R}[x]$,

on en déduit qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $P : x \longmapsto (x - \alpha)^2 Q(x)$,

autrement dit : α est une racine multiple de P. ■

$$\boxed{\text{Une racine } \alpha \text{ d'un polynôme } P \text{ est une racine multiple si, et seulement si, } P'(\alpha) = 0}$$

Ex 12 : *(non corrigé)*

Ex 13 : *(Analyse)* Soit $P(X)$ un polynôme vérifiant : $P(X + 1) = P(X)$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(n + 1)$, ce qui entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$

En posant : $Q(X) = P(X) - P(0)$, il vient $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$

le polynôme $Q(X)$ a donc une infinité de racines, il est donc nul, ce qui entraine $P(X) = P(0)$

Si $P(X)$ vérifie $P(X + 1) = P(X)$ alors il est constant.

(Synthèse) Réciproquement, les polynômes constants vérifient $P(X + 1) = P(X)$

$$\boxed{\text{les polynômes } P(X) \text{ vérifiant : } P(X + 1) = P(X) \text{ sont les polynômes constants}}$$