Feuille_Exo_2 : Polynômes.

Ex 1 : Factoriser le plus possible dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_1 = 8X^3 - 1 \qquad P_2 = 4X^4 - 2X^3 - 2$$

Ex 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme :

$$(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$$

est factorisable par $X(X+1)(2X+1)$

Ex 3 : 1) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + X^3 - 5X^2 + X - 6$ en remarquant que $P(i) = 0$

2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + X - 3$ en remarquant que $P(i) = 0$

3) On note $P = X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 22X + 12$.
Trouver toutes les racines de P sachant que $1 + i$ en est une.

Ex 4 : Quelles sont les racines des polynômes suivants ?

$$P_1 = \prod_{k=0}^{n}(X-k) \qquad P_2 = \prod_{k=0}^{n}\left(X^2 + k^2\right) \qquad P_3 = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n}{k}X^k$$

Ex 5 : Donner le polynôme dérivé des polynômes suivants :

$$P(X) = (X^2-2)(X^2+3X+3) \qquad Q(X) = (X-1)(X+2)+(X-3)(X-4) \qquad R(X) = (X^2+1)^n$$

Ex 6 : Soit $P(X) = 2X^5 - 4X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 4X - 2$,

1) Montrer que 1 est une racine de $P(X)$
2) Montrer que 1 est une racine multiple.
3) En déduire les racines de $P(X)$.

Ex 7 : Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que $(X-1)^2$ divise $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2X^{n-1}$

Ex 8 : Soit f $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$

1) Montrer que l'application f est bien définie.
2) Montrer que f est surjective.
3) f est elle bijective ?

Ex 9 : Soit (a_n) une suite de réels nuls à partir d'un rang N fixé dans $\mathbb{N}$, on note $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Donner $f(0)$ et $f(1)$.
3) Justifier que f est de classe C^∞
4) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.

Ex 10 : Pour chaque entier naturel n, on note : $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

1) Donner $P_0(X)$, $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
2) Calculer $P_n'(X)$.
3) En déduire que, quel que soit l'entier n, $P_n(X)$ ne possède aucune racine multiple.

On pourra raisonner par l'absurde.

Ex 11 : *(Extrait du sujet MCR 2023)*

1) Déterminer trois nombres réels A, B et C tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 3/4, 1\}, \quad \frac{1}{x(x-1)(4x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{4x-3}.$$

2) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)(4x-3)}$ sur l'intervalle $]0, 3/4[$.

Ex 12 : On note $P = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 12X + 8$ et on remarque $P(2i) = 0$.

Factoriser P et en déduire le signe de la fonction polynomiale réelle : $x \longmapsto P(x)$.

Ex 13 : On définit la suite de polynômes (P_n) par :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$$

1) Déterminer le monôme dominant de $P_n(X)$ en fonction de n.
2) Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad P_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

   On pourra utiliser la formule : $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
3) En déduire pour chaque $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de P_n.

Ex 14 : Déterminer tous les polynômes P vérifiant $P(X+1) = P(X)$.

Ex 15 : Déterminer tous les polynômes P vérifiant $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Ex 16 : *Extrait du sujet ENS 2024. Signe des racines d'un polynôme de degré 3.*

On considère un polynôme d'ordre 3 à coefficients réels, qu'on écrit

$$Q(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

où $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $Q(z) = 0$.

On suppose à partir de maintenant que ce polynôme admet trois racines réelles, qu'on note z_1, z_2 et z_3, au sens où

$$Q(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

On les ordonne telles que $z_1 \geqslant z_2 \geqslant z_3$.

2) Montrer que Q' admet deux racines réelles y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$ telles que : $x_1 \geqslant y_1 \geqslant x_2 \geqslant y_2 \geqslant x_3$.
3) En déduire que : $a_2^2 \geqslant 3a_1$.
4) On suppose dans cette question que les racines de Q sont strictement négatives.

   Montrer que dans ce cas a_0, a_1 et a_2 sont strictement positifs.
5) On suppose maintenant que a_0, a_1 et a_2 sont strictement positifs.

   Montrer qu'alors les racines de Q sont strictement négatives.