

La colle commencera par une ou deux questions de cours sur le modèle des questions données au verso de cette page. Les démonstrations du cours pourront être demandés en exercice si le reste est bien maîtrisé.

• **Révisions : Nombres complexes et trigonométrie.**

Forme algébrique d'un nombre complexe. Représentation graphique. Affixe d'un point ou d'un vecteur. Conjugué, module, arguments. Interprétation graphique.
 Ecriture exponentielle. Notation $e^{i\theta}$, propriétés. Formule d'Euler. Linéarisation.
 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.
 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations $z^2 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.
 Propriétés de $\cos(\theta)$, de $\sin(\theta)$ et de $\tan(\theta)$. Périodicités et symétries.
 Formules de trigonométrie : $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
 Résolution d'équations trigonométriques simples. $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$ et $a \cos(\varphi) + b \sin(\varphi) = c$
 Transformation de $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$.

• **Révision sur les fonctions polynomiales réelles.**

Toute fonction polynomiale réelle de degré impair a au moins une racine réelle. (*Démonstration*)
 Fonction polynomiale dérivée.
 Un réel α est une racine multiple d'une fonction polynomiale P si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$ (*Démonstration*)

• **Séries numériques.**

Notation. Série $\sum_{n \geq m} u_n$, sommes partielles $\sum_{k=m}^n u_k$ et en cas de convergence la somme $\sum_{k=m}^{+\infty} u_k$.
 Définition de : "La série $\sum u_n$ est convergente" et définition de " $\sum u_n$ est absolument convergente".
 La nature des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ n'est pas au programme de BCPST.
 Valeur de la somme des séries géométriques, géométriques dérivées (d'ordre 1 ou 2), exponentielles.
 Condition nécessaire de convergence : si $\sum u_n$ est convergente alors (u_n) converge vers 0. (*Démonstration*)
 Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge.
 Théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs. (*démonstration faite en classe*)
 Théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs. (*démonstration faite en classe*)
 Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. (*démonstration faite en classe*)
 Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est commutativement convergente. (*admis*)

• **Polynômes.**

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Notation $\sum_{k=0}^n a_k X^k$.
 Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.
 Unicité de l'écriture des polynômes : un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
 Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.
 Coefficient dominant et degré d'un polynôme. Degré d'une somme, d'un produit de polynômes.
 Notations $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$.
 Définition d'une racine α . Théorème : $P(\alpha) = 0 \iff Q \in \mathbb{C}[X] : P = (X - \alpha)Q$. (*Démonstration*)
 (*La division euclidienne de polynômes est hors programme*).
 Généralisation à plusieurs racines distinctes deux à deux.
 Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
 Ordre de multiplicité d'une racine.
 La caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés n'est pas attendu du programme. (*Le polynôme dérivé n'est pas dans le programme de BCPST, mais on en retrouve au concours.*)
 Cas des polynômes réels : si α est racine, $\bar{\alpha}$ est aussi racine. (*Démonstration*)
 Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. *Ce théorème est admis.*
 La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est hors programme.

• **Python.**

Méthode des rectangles.
 Représentation graphique avec et sans **numpy**. (*comprendre comment faire une subdivision d'un segment $[a, b]$)*
 Slicing sur les listes et listes en compréhension.

Exemples de questions de cours :

La colle commencera par un exercice simple d'application d'un des deux théorèmes de convergence.

L'utilisation d'un théorème (quel qu'il soit) est rarement bien assimilée.

- Démonstration de la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ ou de la divergence de $\sum \frac{1}{n}$.
- Convergence et somme d'une série géométrique (*Enoncé et démonstration*)
- Donner la somme d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 (ou 2) de raison $q \in]-1, 1[$.
- Pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, énoncer la définition de : La série $\sum u_n$ est convergente.
- Calcul de suites équivalentes simples, de fonctions équivalentes. (*Pas de DL*)
- Nature d'une série.
- Calcul de la somme d'une série convergente.
- Enoncé du théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs.
- Enoncé du théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs.
- Utilisation du théorème de convergence par comparaison des termes généraux positifs.
- Utilisation du théorème de convergence par équivalence des termes généraux positifs.
- Etude de la convergence absolue d'une série.
- Ecrire un programme python permettant de représenter les termes d'une suite.
- Ecrire un programme python permettant de tracer une courbe sans **numpy**.
- Ecrire un programme python permettant d'estimer une intégrale en utilisant la méthode des rectangles.
- Comparaison somme/intégrale pour établir la nature d'une série.
- Donner la définition d'une racine multiple.
- Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
- Donner la définition du degré d'un polynôme.
- Enoncé le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Une des deux démonstrations du cours sur les fonctions polynomiales réelles.
- Une des deux démonstrations du cours sur les polynômes.
- Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$