

Ex 1 : (non corrigé)**Ex 2 :** (non corrigé)**Ex 3 :**

$$P(X) - 2R(X) = (X - 3) - 2(X^2 + X + 5) = -2X^2 - X - 13$$

$$P^2 = (X - 3)^2 = X^2 - 6X + 9$$

$$P(X)R(X) = (X - 3)(X^2 + X + 5) = X^3 - X^2 + 2X - 15$$

$$(X + 1)P(X) = (X + 1)(X - 3) = X^2 - 2X - 3$$

$$P(X + 1) = (X + 1) - 3 = X - 2$$

$$P \times (X + 1) = (X - 3)(X + 1) = X^2 - 2X - 3$$

$$Q(P) = 2$$

$$R(P(X)) = (X - 3)^2 + (X - 3) + 5 = X^2 - 6X + 9 + X - 3 + 5 = X^2 - 5X + 11$$

Ex 4 : (Juste les réponses)

$$\deg(2+X+X^4) = 4 \quad \deg((X+2)(5X^2-3)) = 3 \quad \deg((4X+2)^3(1+X)^2) = 5 \quad \deg((X+2)^2-(X^2-3)) = 1$$

Ex 5 : 1) • $\boxed{\Leftarrow}$ Propriété du produit : si P ou Q est nul alors $PQ = 0$.• $\boxed{\Leftarrow}$ (Montrons sa contraposée) On suppose que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

$$\text{on peut alors écrire } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0 \text{ et } Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k \text{ avec } b_m \neq 0$$

$$\text{on a alors } PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ avec } c_{n+m} = a_n b_m \neq 0 \quad \text{donc } PQ \neq 0.$$

2) a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$\begin{aligned} P - 2XP = 2X^2 + X - 1 &\iff (1 - 2X)P = (2X - 1)(X + 1) \\ &\iff (2X - 1)(P(X) + (X + 1)) = 0 \\ &\iff P(X) + (X + 1) = 0 \quad \text{car } (2X - 1) \neq 0 \\ &\iff P(X) = -X - 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\{-X - 1\}$

b.

$$\begin{aligned} P^2 + 2XP = 1 + 2X &\iff (P + X)^2 - X^2 = 1 + 2X \\ &\iff (P + X)^2 - X^2 - 2X - 1 = 0 \\ &\iff (P + X)^2 - (X + 1)^2 = 0 \\ &\iff (P - 1)(P + 2X + 1) = 0 \\ &\iff (P - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad (P + 2X + 1) = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\{1; -2X - 1\}$

3) En prenant $(u_n) = (\mathbb{1}_{n \text{ pair}})$ et $(v_n) = (\mathbb{1}_{n \text{ impair}})$, on a $(u_n) \neq 0$, $(v_n) \neq 0$ et $(u_n)(v_n) = 0$.

4) En prenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ on a : A et B non nulles et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 6 : 1) ❶ Pour chaque entier k , en posant $Q_k(X) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n-1-k} X^i$ on a : $X^k - \alpha^k = (X - \alpha)Q_k(X)$

(Formule de Bernoulli)

❷ Si α est une racine de $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X) - P(\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (X^k - \alpha^k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (X - \alpha) Q_k(X) \quad (\text{définis en ❶}) \\ &= (X - \alpha) \sum_{k=0}^n a_k Q_k(X) \end{aligned}$$

Finalement, en posant $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k Q_k(X)$ on a bien $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$

2) (Voir cours)

Ex 7 : 1) Les entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sont n racines distinctes de P donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X) = Q(X) \prod_{k=1}^n (X - k)$

de plus $\deg(P) = n$ donc $\deg(Q) = 0$ et Q est constant on le note λ , $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - k)$

on sait aussi que $P(0) = 1$ donc $\lambda \prod_{k=1}^n (0 - k) = 1$ et ainsi $\lambda = \frac{(-1)^n}{n!}$

En conclusion :

$$P(X) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^n (X - k) \quad \text{ou encore :} \quad P(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k - X)$$

2) • *Existence.*

$$\begin{aligned} e^{3it} &= (\cos(t) + i \sin(t))^3 \\ &= \cos^3(t) + 3i \cos^2(t) \sin(t) - 3 \cos(t) \sin^2(t) - i \sin^3(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \cos(3t) &= \cos^3(t) - 3 \cos(t) \sin^2(t) \\ &= \cos^3(t) - 3 \cos(t)(1 - \cos^2(t)) \\ &= 4 \cos^3(t) - 3 \cos(t) \end{aligned}$$

ainsi, en posant $P(X) = 4X^3 - 3X$ on a bien $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(3t) = P(\cos(t))$

• *Unicité.* Soient P_1 et P_2 "deux" polynômes vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(3t) = P(\cos(t))$,

on a alors $\forall t \in \mathbb{R}, P_1(\cos(t)) = P_2(\cos(t))$, ou encore $\underbrace{(P_1 - P_2)(\cos(t))}_{\text{Ce n'est pas un produit}} = 0$

Ce n'est pas un produit

Lorsque t décrit \mathbb{R} , $\cos(t)$ prend une infinité de valeurs donc $P_1 - P_2$ a une infinité de racines cela entraîne que $P_1 - P_2$ est le polynôme nul ; on a bien $P_1 = P_2$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{il existe un et un seul polynôme } P \text{ vérifiant : } \forall t \in \mathbb{R}, \cos(3t) = P(\cos(t)).}$$

- Ex 8 :** 1) (*non corrigé*)
 2) (*non corrigé*)

Ex 9 : 1) Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polynôme et α un nombre complexe.

On suppose que P est à coefficients réels et que $P(\alpha) = 0$,

$$\begin{aligned}
 P(\bar{\alpha}) &= \sum_{k=0}^n a_k (\bar{\alpha})^k \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k \overline{\alpha^k} && \overline{z^n} = \bar{z}^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \overline{a_k \alpha^k} && \text{car } a_k \in \mathbb{R} \text{ et } \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}' \\
 &= \overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} && \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \\
 &= \overline{P(\alpha)} \\
 &= 0 && \text{car } P(\alpha) = 0
 \end{aligned}$$

si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si α est une racine de P alors $\bar{\alpha}$ est une racine de P

- 2) (*non corrigé*)
 3) (*non corrigé*)

Ex 10 : 1) Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.

$$\begin{aligned}
 P(z) = 0 &\iff z^4 + 1 = 0 \\
 &\iff z^4 = -1 \\
 &\iff r^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi} \\
 &\iff r^4 = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} : 4\theta = \pi + 2k\pi \\
 &\iff r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Les racines de $X^4 + 1$ sont : $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$

- 2) (*non corrigé*)