Correction de la feuille-Cours-2 : Polynômes.

Ex 1 : *(non corrigé)*
Ex 2 : *(non corrigé)*
Ex 3 :

$$P(X) - 2R(X) = (X-3) - 2(X^2 + X + 5) = -2X^2 - X - 13$$

$$P^2 = (X-3)^2 = X^2 - 6X + 9$$

$$P(X)R(X) = (X-3)(X^2 + X + 5) = X^3 - X^2 + 2X - 15$$

$$(X+1)P(X) = (X+1)(X-3) = X^2 - 2X - 3$$

$$P(X+1) = (X+1) - 3 = X - 2$$

$$P \times (X+1) = (X-3)(X+1) = X^2 - 2X - 3$$

$$Q(P) = 2$$

$$R(P(X)) = (X-3)^2 + (X-3) + 5 = X^2 - 6X + 9 + X - 3 + 5 = X^2 - 5X + 11$$

— —

Ex 4 : *(Juste les réponses)*

$\deg(2+X+X^4) = 4 \qquad \deg((X+2)(5X^2-3)) = 3 \qquad \deg((4X+2)^3(1+X)^2) = 5 \qquad \deg((X+2)^2-(X^2-3)) = 1$

Ex 5 : 1) • $\boxed{\Longleftarrow}$ Propriété du produit : si P ou Q est nul alors $PQ = 0$.

• $\boxed{\Longleftarrow}$ *(Montrons sa contraposée)* On suppose que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

on peut alors écrire $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ avec $b_m \neq 0$

on a alors $PQ = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ avec $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$ donc $PQ \neq 0$.

2) a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$\begin{aligned} P - 2XP = 2X^2 + X - 1 &\iff (1-2X)P = (2X-1)(X+1) \\ &\iff (2X-1)\Big(P(X) - (X+1)\Big) = 0 \\ &\iff P(X) - (X+1) = 0 \qquad \textit{car } (2X-1) \neq 0 \\ &\iff P(X) = X + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \Big\{X+1\Big\}}$$

b. *(juste l'idée)*

$$P^2 + 2XP = 1 + 2X \iff (P+X)^2 - X^2 = 1 + 2X \iff (P+X)^2 - (X+1)^2 = 0$$

3) En prenant $(u_n) = (\mathbb{1}_{n \text{ pair}})$ et $(v_n) = (\mathbb{1}_{n \text{ impair}})$, on a $(u_n) \neq 0$, $(v_n) \neq 0$ et $(u_n)(v_n) = 0$.

4) En prenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ on a : A et B non nulles et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 6 : 1) ❶ Pour chaque entier k, en posant $Q_k(X) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n-1-k} X^k$ on a : $X^k - \alpha^k = (X-\alpha)Q_k(X)$

(Formule de Bernoulli)

❷ Si α est une racine de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & P(X) - P(\alpha) \\ & = & \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \\ & = & \sum_{k=0}^{n} a_k \big(X^k - \alpha^k\big) \\ & = & \sum_{k=0}^{n} a_k \big(X-\alpha\big) Q_k(X) \qquad \textit{(définis en ❶)} \\ & = & \big(X-\alpha\big) \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(X) \end{array}$$

Finalement, en posant $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(X)$ on a bien $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $P(X) = \big(X-\alpha\big)Q(X)$

2) *(Voir cours)*

Ex 7 : 1) Les entiers de $[\![1;n]\!]$ sont n racines dictinctes de P donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X) = Q(X)\prod_{k=1}^{n}(X-k)$

de plus $\deg(P) = n$ donc $\deg(Q) = 0$ et Q est constant on le note λ, $\quad P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X-k)$

on sait aussi que $P(0) = 1$ donc $\lambda \prod_{k=1}^{n}(0-k) = 1$ et ainsi $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{n!}$

En conclusion :

$$\boxed{P(X) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X-k) \qquad \text{ou encore :} \qquad P(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(k-X)}$$

2) • *Existence.*

$$\begin{array}{rcl} e^{3it} & = & (\cos(t) + i\sin(t))^3 \\ & = & \cos^3(t) + 3i\cos^2(t)\sin(t) - 3\cos(t)\sin^2(t) - i\sin^3(t) \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \cos(3t) & = & \cos^3(t) - 3\cos(t)\sin^2(t) \\ & = & \cos^3(t) - 3\cos(t)(1-\cos^2(t)) \\ & = & 4\cos^3(t) - 3\cos(t) \end{array}$$

ainsi, en posant $P(X) = 4X^3 - 3X$ on a bien $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(3t) = P(\cos(t))$

• *Unicité.* Soient P_1 et P_2 "deux" polynômes vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(3t) = P(\cos(t))$,
on a alors $\forall t \in \mathbb{R},\ P_1(\cos(t)) = P_2(\cos(t))$, ou encore $\underbrace{(P_1 - P_2)\big(\cos(t)\big)}_{\textit{Ce n'est pas un produit}} = 0$
Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\cos(t)$ prend une infinité de valeurs donc $P_1 - P_2$ a une infinité de racines cela entraine que $P_1 - P_2$ est le polynôme nul ; on a bien $P_1 = P = 2$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{il existe un et un seul polynôme } P \text{ vérifiant : } \forall t \in \mathbb{R},\ \cos(3t) = P\big(\cos(t)\big).}$$

Ex 8 : 1) *(non corrigé)*

2) *(non corrigé)*

Ex 9 : 1) Soient $P = \sum_{k=0} a_k x^k$ un polynôme et α un nombre complexe.

On suppose que P est à coefficients réels et que $P(\alpha) = 0$,

$$\begin{array}{rcll}
P(\overline{\alpha}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(\overline{\alpha})^k & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{\alpha^k} & \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k\alpha^k} & \text{car } \ a_k \in \mathbb{R} \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \\
 & = & \overline{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k} & \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\
 & = & \overline{P(\alpha)} & \\
 & = & 0 & \text{car } P(\alpha) = 0
\end{array}$$

$$\boxed{\text{si } \ P \in \mathbb{R}[X] \text{ et si } \alpha \text{ est une racine de } P \ \text{ alors } \ \overline{\alpha} \text{ est une racine de } P}$$

2) *(non corrigé)*

3) *(non corrigé)*

Ex 10 : 1) Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.

$$\begin{array}{rcl}
P(z) = 0 & \iff & z^4 + 1 = 0 \\
 & \iff & z^4 = -1 \\
 & \iff & r^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi} \\
 & \iff & r^4 = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \ 4\theta = \pi + 2k\pi \\
 & \iff & r = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Les racines de } X^4 + 1 \text{ sont } : \ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } e^{i\frac{7\pi}{4}}}$$

2) *(non corrigé)*