Feuille Act_6 : Fonctions usuelles. Continuité, dérivabilité.

Ex 1 : Déterminer sans calculatrice la valeur de : $\lfloor \log(125635) \rfloor$

Ex 2 : Etudier la parité des fonctions : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{rcl}]-1\,;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{array}$

Ex 3 : Dans les questions suivantes les réponses pourront s'appuyer sur des arguments graphiques.

1) Résoudre les équations et inéquations suivantes : $(E) :\ \lfloor x \rfloor = x - \dfrac{1}{2}$ $\qquad (I) :\ |x| \leqslant x^4$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : e^x + x - 1 = 0 \qquad (E_2) : \ln(x) = x - 1 \qquad (E_3) : \sqrt{x+2} + x + 1 = 0$$

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1)\ :\ \dfrac{1}{x} < x^7$ $\qquad (I_2)\ :\ \left|x^2 - 1\right| \leqslant x$

Ex 4 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $(E_1)\ :\ x^x = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $\qquad (E_2)\ :\ e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

2) $\exp\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) < 2$ sur $\mathbb{R}$, $\qquad 4^x - 2^x - 2 \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

3) $|\log(x) - 1| = 2$ sur $\mathbb{R}$, $\qquad x^{1/3} - 5\,x^{1/6} + 6 = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) $(\ln(x))^2 - \ln\left(x^2\right) - 3 = 0$ sur $\mathbb{R}$, $\qquad (*)\quad x^4 = 4^x$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 5 : Donner l'allure des courbes :

$$C_1 :\ y = |x-2| \qquad C_2 :\ y = |2x+2|$$

En déduire les solutions de l'équation : $|x-2| = |2x+2|$.

Ex 6 : Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto |x-2| + |2x| - 2|x+1|$

En déduire les solutions de l'équation : $|x-2| + |2x| - 2|x+1| = -3x + 1$

Ex 7 : Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes : (*sans faire d'étude de fonction*)

1) $f_1 : x \longmapsto 1 - |x|$ $\qquad f_2 : x \longmapsto |x+1| + 3$ $\qquad f_3 : x \longmapsto 2|x-3|$ et $f_4 : x \longmapsto \big|\,|x| - 1\big|$.

2) $f_1 : x \longmapsto 1 + x^2$ $\qquad f_2 : x \longmapsto 2 - x^2$ $\qquad f_3 : x \longmapsto (x+1)^2 - 2$ et $f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{2}(x+1)^2$.

3) $f_1 : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ $\qquad f_2 : x \longmapsto \sqrt{2-x}$ $\qquad f_3 : x \longmapsto 2 - \sqrt{x}$ et $f_4 : x \longmapsto \sqrt{2x+1}$.

4) (*) Pour $\varphi \in]-\pi;\pi]$, $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f : t \longmapsto A\cos(\omega t - \varphi)$

Ex 8 : Illustrer graphiquement les propositions suivantes.

(*Pas sur le cercle trigonométrique mais avec des représentations graphiques de fonction*)

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
2) $\exists! x \in [0;\pi], \quad \cos(x) = \sin(x)$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 1 \leqslant e^x$
4) $\forall x > -1, \quad \ln(x+1) \leqslant x$
5) $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right], \quad \dfrac{2}{\pi}\,x \leqslant \sin(x) \leqslant x$

Ex 9 : Tracer l'allure des courbes suivantes :

$$C_1 : y = \cos(x) + \sin(x) \qquad C_2 : y = x - \lfloor x \rfloor$$

Ex 10 : Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition.

① La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|+1}$

② La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

③ La fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1;\, 0\,[\cup]\,0\,; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Ex 11 : Soit f le polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^8 + x^2 + 2x - 1$

1) Montrer que f possède au moins deux racines réelles.
2) Montrer qu'il existe une unique racine α qui vérifie $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
3) Déterminer une valeur approchée de α à l'aide votre calculatrice ou d'un ordinateur.

Ex 12 : Soit f la fonction définie sur $]\,0; 1[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1-x}$

Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $[\,0; 1]$.

Ex 13 : Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 2[$ dans un intervalle que l'on déterminera.
2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $]0, 2[$, (notée u_n).
3) Déterminer le sens de variation de (u_n) et étudier sa limite.

Ex 14 :
1) Résoudre $4^x = x^4$ sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $4^x = x^4$ a une et une seule solution négative, notée α.
3) Déterminer une valeur approchée de α avec votre calculatrice.

Ex 15 : Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$, (*f est définie sur $[0, 1]$ et elle prend ses valeurs dans $[0, 1]$*).

montrer que f admet (au moins) un point fixe. (*ie.* un $c \in [0; 1]$, tel que $f(c) = c$)

Ex 16 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in [0, 1], \ f(x) = xe^x$.

Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, e]$.

Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, e]$.

Ex 17 : Soit f la fonction définie sur $[0, 4\pi]$ par $f(x) = \sin(x) - x$

montrer que f réalise une bijection de $[0, 4\pi]$ dans $[-4\pi; 0]$ (que nous noterons toujours f).

Quel est l'ensemble de dérivabilité de la fonction f^{-1}.

Ex 18 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

Ex 19 : On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x^3\ln(x)$.

1) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
2) Montrer que ce prolongement est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

Ex 20 : Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et P une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré n et admettant n racines réelles distinctes.

Montrer que P' admet exactement $n-1$ racines réelles.

Ex 21 :
1) Déterminer le signe de $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$
3) La fonction f est-elle dérivable en 2 ?