Fiche de révision — Fonctions

Majoration, minoration, maximum, minimum.

- f est majorée sur E signifie que :
  $\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in E, \quad f(x) \leq M$
- M est le maximum de f sur D signifie que :
  $\forall x \in E, \quad f(x) \leq M$ et $\exists x_0 \in D$ tel que $M = f(x_0)$

Sens de variations.

- **Définition**
  f est croissante sur D signifie que :
  $\forall (a,b) \in D^2, \ a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$
  f est strictement croissante sur D signifie que :
  $\forall (a,b) \in D^2, \ a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$
- **Théorème**
  Si f est strictement croissante sur D alors
  $\forall (a,b) \in D^2, \quad a = b \iff f(a) = f(b)$
  $\forall (a,b) \in D^2, \quad a < b \iff f(a) < f(b)$
  $\forall (a,b) \in D^2, \quad a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$

Limites

Définitions

- 25 définitions pour $\lim\limits_{x \to \alpha} = \beta$
  avec α et β : $a \in \mathbb{R}, \ +\infty, \ -\infty, \ a^+$ ou a^-.
- f est **continue** en x_0 signifie que :
  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $f(x_0) = \ell$

Limites et inégalités.

- Si $\lim\limits_{\alpha} f$ et $\lim\limits_{\alpha} g$ existent dans $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{\alpha} f < \lim\limits_{\alpha} g$ alors $f(x) < g(x)$ sur un voisinage de α.
- Si $\lim\limits_{\alpha} f$ et $\lim\limits_{\alpha} g$ existent dans $\mathbb{R}$ et si $f(x) \leq g(x)$ sur un voisinage de α alors $\lim\limits_{\alpha} f \leq \lim\limits_{\alpha} g$

Théorème de comparaison.

- Si $\left| \begin{array}{l} \text{au vois. de } \alpha \text{ , } f(x) \leq g(x) \\ \text{et } \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty \end{array} \right.$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$.
- Si $\left| \begin{array}{l} \text{au vois. de } \alpha \text{ , } g(x) \leq f(x) \leq h(x), \\ \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell \end{array} \right.$
  alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Opérations et limites.

- Tableaux pour $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$.
- Composée de deux fonctions.
  Si $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \\ \text{et} \\ \lim\limits_{y \to \beta} g(y) = \gamma \end{array} \right.$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$
- Une suite et une fonction.
  Si $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \end{array} \right.$ alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers β quand n tend vers $+\infty$.

Croissances comparées

Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$

Théorème de limite monotone

Si f est monotone sur l'intervalle $\Big] \alpha ; \beta \Big[$ alors f admet une limite (réelle ou ∞) à droite en α et à gauche en β.

Fonctions continues

- **Opérations et continuité**.
  Si f et g sont C^0 sur D alors $\alpha f + \beta g$ et $f \times g$ aussi.
  Si $f \in C^0(I)$, $g \in C^0(J)$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in C^0(I)$
- **Théorème des valeurs intermédiaires**.
  Si f est continue sur un intervalle I contenant a et b ,
  alors $\forall \lambda \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \lambda$
- **Théorème de la bijection**.
  Si $\begin{cases} ① \ I \text{ est un intervalle} \\ ② \ f \text{ est continue sur } I \\ ③ \ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases}$
  alors $\begin{cases} ❶ \ f(I) \text{ est un intervalle} \\ ❷ \ f \text{ réalise une bijection de } I \text{ dans } f(I) \end{cases}$
- **Image continue d'un segment**.
  Théorème. L'image directe d'un segment par une fonction continue est segment.

Fonctions dérivables

- **Définition**. f est dérivable en x_0 signifie que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite réelle quand $x \to x_0$
- **Equation de la tangente** ; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
- Opérations et dérivabilité. *(Voir cours pour les conditions)*
  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad (f \times g)' = f'g + fg'$,
  $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\right)}$
- **Extremum local sur un ouvert**.
  Si $\begin{cases} f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R} \text{ dérivable} \\ f \text{ admet un extr. local en } a \end{cases}$ alors $f'(a) = 0$
- **Théorème de Rolle**.
  Si $\begin{cases} f \text{ est cont.sur } [a,b] \\ f \text{ est dér. sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$ alors $\exists c \in]a,b[: \ f'(c) = 0$
- **Théorème des accroissements finis.**
  Si $\begin{cases} f \text{ cont. sur } [a,b] \\ f \text{ der. sur }]a,b[\end{cases}$
  alors $\exists c \in]a,b[: f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- **Dérivée et sens de variations**.
  Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I,
  ❶ $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$ **si, et seulement si,** f est croissante sur I.
  ❷ $\forall x \in I, \quad f'(x) \leq 0$ **si, et seulement si,** f est décroissante sur I.
  ❸ $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$ **si, et seulement si,** f est constante sur I.

Limite de la somme de deux fonctions : $f+g$

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'			
$+\infty$			
$-\infty$			

Limite du produit de deux fonctions : $(f \times g)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0				

Limite du quotient de deux fonctions : $\left(\dfrac{f}{g}\right)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$				
$+\infty$				
$-\infty$				
0^+				
0^-				

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	dérivée
$x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto a^x$	$x \longmapsto \ln(a)a^x$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$	$x \longmapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$

Fonction	dérivée
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto \cos(x)$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto -\sin(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto 1+\tan^2(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$x \longmapsto \arctan(x)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$