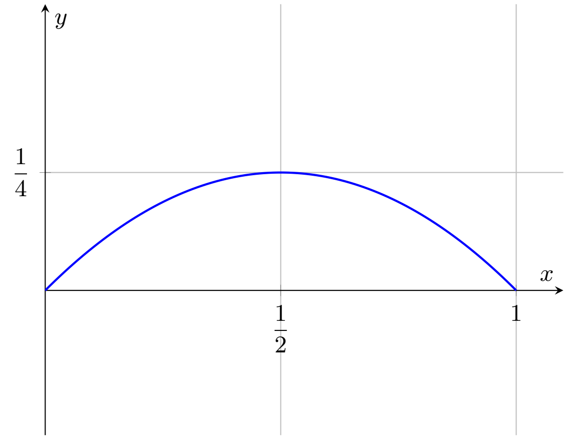
BCPST 2$_A$

Correction du devoir surveillé du 27 septembre 2025

EXERCICE 1

1) $f_{1,1} : x \longmapsto x(1-x)$ c'est une parabole de sommet $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, les racines du polynôme sont 0 et 1.

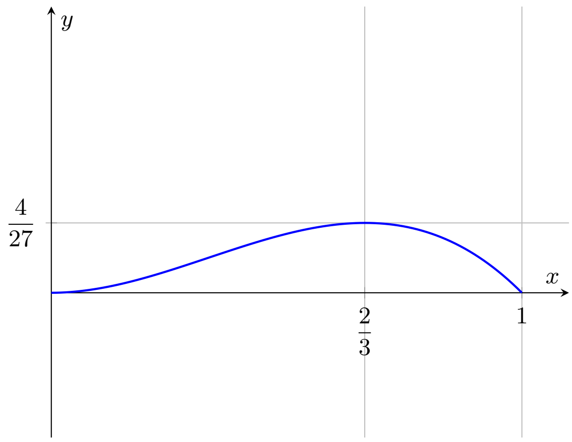
La courbe est :



$f_{2,1} : x \longmapsto x^2(1-x) = x^2 - x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_{2,1} : x \longmapsto 2x - 3x^2 = x(2-3x)$
Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

Et la courbe :



2) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{0,n} = \int_0^1 x^0(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{1}{n}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = -0 + \frac{1}{n+1}, \text{ donc}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{0,n} = \frac{1}{n+1}}$$

3) $x \longmapsto x^a$ et $x \longmapsto \left(-\dfrac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}\right)$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, ce qui permet l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}
I_{a,b} &= \int_0^1 x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^a\left(-\frac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 ax^{a-1}\left(-\frac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad I_{a,b} = \frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}}$$

4) Montrons par récurrence sur a que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\forall b \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \dfrac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}_{\mathscr{P}(a)}$

- Pour $a = 0$,

  d'une part $I_{0,b} = \dfrac{1}{b+1}$ *(d'après la question 2)*, d'autre part $\dfrac{0!\,b!}{(0+b+1)!} = \dfrac{1}{b+1}$

  La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(a)$ est vraie,

  pour $b \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
I_{a+1,b} &= \frac{a+1}{b+1} I_{a,b+1} && \textit{(d'après la question 3))} \\
&= \frac{a+1}{b+1} \times \frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!} && \textit{(en utilisant l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(a+1)!\,b!}{(a+1+b+1)!} && \textit{(on a alors } \mathscr{P}(a+1)\textit{)}
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

5) D'après la question 4., $\dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \dfrac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+3)!} \times \dfrac{(2n+1)!}{n!n!} = \dfrac{(n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{1}{4}}$$

6) Dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

7) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{1}{4}$ donc en utilisant la définition avec $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ et $u_n = \dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$ il vient :

$$\boxed{\text{il existe } n_0 \text{ tel que : } \forall n \geqslant n_0,\ \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leqslant \frac{1}{2}}$$

8) *On peut raisonner ici par récurrence sur $n \geqslant n_0$ ou en faisant un produit comme ci-dessus :*

On a : $\forall k \geqslant n_0,\ \dfrac{I_{k+1,k+1}}{I_{k,k}} \leqslant \dfrac{1}{2}$,

donc en faisant le produit pour k entre n_0 et $n-1$ il vient (*produit télescopique*) : $\dfrac{I_{n,n}}{I_{n_0,n_0}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad I_{n,n} \leqslant \frac{2^{n_0}}{2^n} I_{n_0,n_0}}$$

9) D'une part :

la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, en effet $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\sum \frac{2^{n_0}}{2^n} I_{n_0,n_0}$ est convergente,

D'autre part : Pour tout $n \geqslant n_0$, $\quad 0 \leqslant I_{n,n} \leq \frac{2^{n_0}}{2^n} I_{n_0,n_0}$

donc (*théorème de convergence par comparaison*) :

$$\boxed{\text{la série de terme général } I_{n,n} \text{ converge.}}$$

10) **a)** $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n+1}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n+1} = 0$.

$$\boxed{\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}}$$

b) On déduit de la question précédente que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = -1$ et par composition avec exp on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right) = e^{-1}}$$

c)

$$\begin{aligned}
4^n I_{n,n} &= 4^n \frac{n!n!}{(2n+1)!} \\
&\sim 4^n \frac{n^n.n^n}{(2n+1)^{2n+1}} \frac{e^{2n+1}}{e^n.e^n} \frac{2\pi n}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \\
&\sim \frac{1}{2n} \exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right).e.\sqrt{\frac{2\pi n^2}{2n+1}} \\
&\sim \frac{1}{2n}.e^{-1}.e.\sqrt{\pi n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{4^n I_{n,n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

d) D'une part : la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. et pour tout $n \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

donc *(théorème de convergence par comparaison)* : la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

D'autre part : $4^n I_{n,n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$

donc *(théorème de convergence par équivalence)* :

$$\boxed{\text{la série de terme général } 4^n I_{n,n} \text{ diverge.}}$$

EXERCICE 2 :

11) **a)** *(Question très classique que vous rédigez mal, voir très mal, car vous semblez ne pas comprendre ce que vous écrivez. Vous devez faire toujours le lien avec le cours.)*

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$,

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur le segment $[p;p+1]$ donc

$$\forall t \in [p;p+1],\ \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{p}$$

Les fonctions sont continues sur $[p;p+1]$ donc *(croissance de l'intégrale)*

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p}}$$

b) On fixe un $k \in \mathbb{N}^*$ et on somme l'encadrement précédent pour p allant de 1 à $k-1$, il vient

$$\sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p+1} \leqslant \sum_{p=1}^{k-1} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

On en déduit avec la relation de Chasles et un changement d'indice.

$$\sum_{p=2}^{k} \frac{1}{p} \leqslant \int_1^{k} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

on en déduit $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - 1 \leqslant \ln(k) \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \frac{1}{k}$ puis $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln(k) \leqslant 1$, on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln(k) \leqslant 1}$$

12) Soit $x \in [0,1[$,

Sachant que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \dfrac{x^n}{n} \leqslant x^n$ et que la série géométrique $\sum x^n$ converge *(car* $-x- < 1$*)*
on peut appliquer le théorème de convergence et il vient :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[, \text{ la série } \sum \frac{x^n}{n} \text{ converge}}$$

13) **a)** pour $t \in [0,1[$, on a $t \neq 1$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} t^n = \frac{1-t^N}{1-t}}$

b) Soit x un réel tel que $0 \leqslant x < 1$.
La relation de la question précédente donne :

$$\forall t \in [0,x], \ \sum_{n=0}^{N-1} t^n = \frac{1}{1-t} - \frac{t^N}{1-t}$$

En intégrant entre 0 et x on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^x t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^N}{1-t} \mathrm{d}t}$$

Sachant que $0 \leqslant x < 1$ on a :

$$\forall t \in [0,x], \quad 0 \leqslant \frac{t^N}{1-t} \leqslant \frac{t^N}{1-x} \qquad \textit{(En effet : } 0 < 1-x \leqslant 1-t\textit{)}$$

Avec la croissance de l'intégrale il vient : $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^N}{1-t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x} \int_0^x t^N \mathrm{d}t$

On a bien :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^N}{1-t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x} \frac{x^{N+1}}{N+1}}$$

c) On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^N}{1-t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x} \frac{x^{N+1}}{N+1}$

or $x \in [0,1[$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1-x} \frac{x^{N+1}}{N+1} = 0$ et ainsi *(le théorème des gendarmes)* on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^N}{1-t} \mathrm{d}t = 0$

et comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t,$ on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)}$$

14) **a)** Prenons un x dans $]0,1[$,

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n^2\ln(n)x^n=\dfrac{\ln(n)}{n}\times n^3x^n$

or on sait *(croissance comparées)* que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^3x^n=0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}n^2\ln(n)x^n=0}$$

b) *(Là il y avait une question classique mais difficile car non vue en classe)*

Sachant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^2\ln(n)x^n=0$, il existe un n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0,\ n^2\ln(n)x^n\leqslant 1$

on a alors $\forall n\geqslant n_0,\ 0\leqslant\ln(n)x^n\leqslant\dfrac{1}{n^2}$ et comme $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge il vient *(théorème de convergence)*

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0,1[\text{, la série de terme général } \ln(n)x^n \text{ est convergente}}$$

15) On pose maintenant $\displaystyle S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\ln(n)x^n$ et $\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n$.

a) la question **11)** a donné $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0\leqslant\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln(n)\leqslant 1$

en multipliant par $x^n\geqslant 0$ on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0\leqslant\sum_{p=1}^{n}\frac{x^n}{p}-x^n\ln(n)\leqslant x^n$

et en sommant pour n allant de 1 à N on obtient bien :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[\quad\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{x^n}{p}\right)-S_N(x)\leqslant\sum_{n=1}^{N}x^n}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{n}\frac{x^n}{p} &= \sum_{p=1}^{N}\sum_{n=p}^{N}\frac{x^n}{p}\\ &= \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}\times\frac{x^p-x^{N+1}}{1-x} \qquad \textit{(somme géométrique)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{x^n}{p}\right)=\frac{1}{1-x}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{x^p}{p}-\sum_{p=1}^{N}\frac{x^{N+1}}{p}\right)}$$

c) Déduire de **a)** et de **b)** que :

$$\forall x\in[0,1[,\quad\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant\frac{1}{1-x}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{x^p}{p}-x^{N+1}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}\right)-S_N(x)\leqslant\frac{x}{1-x}$$

d) Justifier que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}x^{N+1}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}=0.$

e) Déduire de la question **13)c)** et des résultats établis en **15) c), d)** que :

$$S(x)\underset{x\to1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

EXERCICE 3 :

16) **a)**

```
def maxi(L):
    m = L[0]
    for i in range(1, len(L)):
        if m < L[i]:
            m = L[i]              # à la fin de chaque tour de boucle m = max de L[: i+1]
    return m
```

sur les trois exemples `L1`, `L2` et `L3` cette fonction renvoie respectivement `6.2` `-1` et `5`

b)

```
def somme(L):
    s = 0
    for i in range(len(L)):
        s += L[i]
    return s
```

```
def somme(L):
    s = 0
    for x in L:
        s += x
    return s
```

c)

```
def distinct(L):
    D = []                  # D va recueillir au fur et à mesure les nouveaux éléments de L
    for x in L:
        if x not in D:
            D.append(x)
    return D
```

17) **a)**

```
def maxi2(L):
    m = maxi(L[0])
    for i in range(1, len(L)):    #  On parcourt les lignes en indice
        if m < maxi(L[i]):
            m = maxi(L[i])
    return m
```

Une deuxième approche pour Héléna.

```
def maxi2(L):
    m = L[0][0]
    for i in range(1, len(L)):      #  On parcourt les lignes en indice
        for j in range(len(L[i])):  #  On parcourt la sous liste L[i] en indice
            if m < L[i][j]:
                m = L[i][j]
    return m
```

b)

```
def somme2(L):
    s = 0
    for i in range(len(L)):
        s += somme(L[i])
    return s
```

c)

```
def long_max(L):
    m = len(L[0])
    for i in range(1, len(L)):     #  On parcourt les lignes en indice
        if m < len(L[i]):
            m = len(L[i])
    return m
```

d) Une élève de la classe n'est pas contente car j'ai dit que les "for while" c'est rare. Et ici c'est un "for while".
(On modifie ou on renvoie : la question n'est pas claire)
On modifie :

```
def rajoute_0(L):
    m = long_max(L)
    for x in L:                 # x parcourt les lignes
        while len(x) < m:       # tant qu'il n'a pas la bonne taille
            x.append(0)         # on ajoute des zéros.
```

On renvoie : *(en évitant un effet de bord non voulu)*

```
def rajoute_0(L):
    S = []
    m = long_max(L)
    for x in L:
        s = x[:]                # s est une copie de la ligne en court
        while len(s) < m:
            s.append(0)
        S.append(s)
    return S
```

18) **a)**
```
def max_lignes(T):
    L = [maxi(x) for x in T]              # x parcourt les lignes
    return L
```
b)
```
def max_colonnes(T):
    L = []
    for j in range(len(T[0])):
        C = [T[i][j] for i in range(len(T))]      # Les valeurs de la colonne j
        L.append(maxi(C))
    return L
```
c) `max_lignes(T1)` donne `[1, 3, 5]`
`max_colonnes(T1)` donne `[5, 4, 3, 2]`
Et pour `T2` les deux fonctions renvoient la même chose *(Matrice symétrique)*
`[50, 41, 34, 29, 26, 25, 26, 29, 34, 41, 50]`

PROBLEME :

Partie 1

19) $t \longmapsto t-\alpha$ et f sont de classe C^1 sur $[a,b]$ donc on peut faire l'intégration par parties suivantes :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \Big[-(\beta-t)f(t)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta -(\beta-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)f(\alpha) + \int_\alpha^\beta (\beta-t)f'(t)\,\mathrm{d}t}$$

20) Pour α et β dans $[a,b]$ vérifiant $\alpha < \beta$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\alpha^\beta \big(f(t)-f(\alpha)\big)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t - (\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \\
&= \left|\int_\alpha^\beta (\beta-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \qquad \textit{(d'après 1))} \\
&\leqslant \int_\alpha^\beta \big|(\beta-t)f'(t)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M\int_\alpha^\beta (\beta-t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M\Big[-\frac{1}{2}(\beta-t)^2\Big]_\alpha^\beta
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta \big(f(t)-f(\alpha)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}}$$

21) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\, dt \\
&= \int_a^b f(t)\, dt \quad - \quad \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \qquad \textit{(relation de Chasles)} \\
&= \int_a^b f(t)\, dt - S_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt - S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\, dt}$$

22)

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\, dt - S_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\, dt \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\, dt \right| \qquad \textit{(Inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \qquad \textit{(Question 2))} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&\leqslant M \frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\, dt - S_n \right| \leqslant M \frac{(b-a)^2}{2n}}$$

Partie 2

23) f' est de classe C^1 donc on peut faire l'intégration par parties suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (\beta - t)(t - \alpha) f''(t) \mathrm{d}t &= \Big[(\beta - t)(t - \alpha) f'(t) \Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (-(t - \alpha) + (\beta - t)) f'(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta (2t - \alpha - \beta) f'(t) \mathrm{d}t \\
&= \Big[(2t - \alpha - \beta) f(t) \Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta 2 f(t) \mathrm{d}t \qquad \textit{(car } f \in C^1([a,b])\textit{)} \\
&= (\beta - \alpha) f(\beta) - (\alpha - \beta) f(\alpha) - 2 \int_\alpha^\beta f(t) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(t) \mathrm{d}t = (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (\beta - t)(t - \alpha) f''(t) \mathrm{d}t}$$

24) *(Il y avait une erreur d'énoncé)*

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (\beta - t)(t - \alpha)\, \mathrm{d}t &= \Big[(\beta - t) \frac{(t-\alpha)^2}{2} \Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta - \frac{(t-\alpha)^2}{2} \mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta \frac{(t-\alpha)^2}{2} \mathrm{d}t \\
&= \Big[\frac{(t-\alpha)^3}{6} \Big]_\alpha^\beta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (\beta-t)(t-\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}}$$

25) La relation obtenue à la question **23)** peut s'écrire :

$$\int_\alpha^\beta \left(f(t) - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\beta-t)(t-\alpha)f''(t)\mathrm{d}t$$

et comme $\alpha < \beta$, on a : *(Inégalité triangulaire)*

$$\left|\int_\alpha^\beta \left(f(t) - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \underbrace{(\beta-t)(t-\alpha)}_{\geqslant 0}|f''(t)|\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta \left(f(t) - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \underbrace{(\beta-t)(t-\alpha)}_{\geqslant 0}|f''(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M_2}{2}\int_\alpha^\beta \underbrace{(\beta-t)(t-\alpha)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}t \qquad \textit{(car } |f''(t)| \leqslant M_2 \textit{ sur } [\alpha,\beta]\textit{)}\end{aligned}$$

Il reste à utiliser le résultats de la question **24)**

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta \left(f(t) - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant M_2\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}}$$

26)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)dt - T_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}dt\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(t) - \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right)dt\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_2\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12}\end{aligned}$$

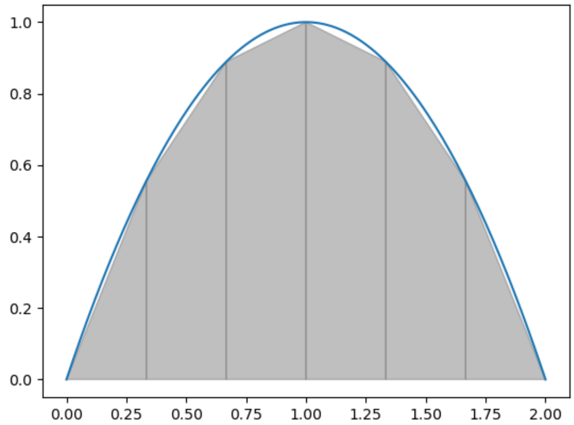
or $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$ pour tout k, donc on obtient bien :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)dt - T_n\right| \leqslant M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}}$$

27) L'inégalité précédente permet d'établir *(Théorème des gendarmes)* que (T_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

La majoration de l'erreur est négligeable devant celle obtenue pour la méthode des rectangles. Ce qu'on peut interpréter par : La seconde méthode converge plus vite. (!!)

28) T_n est la somme des trapèzes représentés dans la figure ci-dessous.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Partie 3

29)
```
def somme_rectangle(f, a, b, n):
    S = 0
    for k in range(n):
        x = a + k*(b-a)/n
        S += f(x)
    return S*(b-a)/n
```

30)
```
def somme_trapeze(f, a, b, n):
    S = 0
    pas = (b-a)/n
    for k in range(n):
        x = a + k*pas
        S += (f(x)+f(x+pas))/2
    return S*pas
```

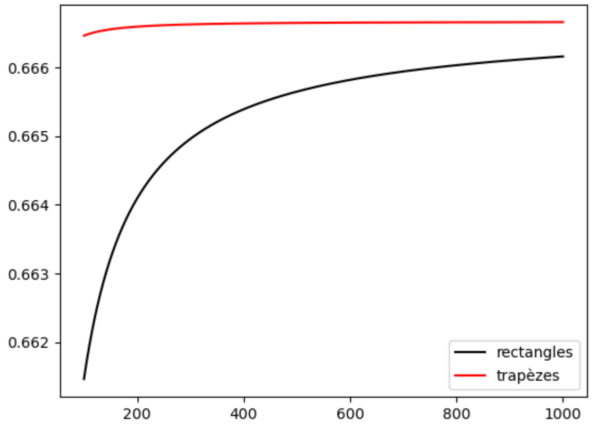
31) *J'ai changé la fonction et l'intervalle pour voir une différence*

```
def f(x):
    return x**.5

a, b = 0, 1

x = []
y1, y2 = [], []
for n in range(10, 100):
    x.append(n)
    y1.append(somme_rectangle(f, a, b, n))
    y2.append(somme_trapeze(f, a, b, n))


plt.figure('Partie 3')
plt.plot(x, y1, 'k',label='rectangles')
plt.plot(x, y2, 'r',label='trapèzes')
plt.legend()
plt.show()
```



FIN DE LA CORRECTION

Rapport du concours sur l'exercice 1

1) La question est traitée de façon satisfaisante mais l'on pouvait espérer mieux.
La fonction $f_{1,1}$ était polynomiale de degré 2 avec des racines apparentes. Une étude n'est pas nécessaire pour tracer un graphe qui doit être une parabole dont il convient de donner les coordonnées du sommet. Pour la fonction $f_{2,1}$, une étude de fonction était nécessaire. Il faut faire apparaître les tangentes horizontales ainsi que le maximum sur $[0, 1]$

2) Question réussie à 60% à cause d'erreurs de signe. Trouver une intégrale négative devait interpeler.

3) L'intégration par parties à effectuer n'a pas été repérée par les candidats et, lorsqu'elle l'a été, les hypothèses n'ont pas été systématiquement vérifiées. Enfin l'annulation du crochet provenait du fait que a soit strictement positif. À noter que le jury a récompensé les initiatives sur la manipulation de l'intégrande même lorsque que celles-ci n'aboutissaient pas au résultat escompté.

4) La récurrence a souvent été identifiée mais mal traitée. La présence de deux entiers nécessitait de bien soigner l'hypothèse de récurrence ainsi que l'hérédité.

5) Question réussie dans 60% des copies où elle est traitée. Les erreurs portent sur la simplification des factorielles. Une partie des points est attribué lorsque la simplification est fausse mais la suite cohérente.

6) Question de cours qui n'a été correctement traitée que dans moins de 20% des copies.

7) Question peu traitée. À noter qu'un raisonnement direct permettait de conclure.

8) La récurrence a été repérée mais bien rédigée uniquement dans un quart des copies où elle est traitée. Par ailleurs, pour obtenir l'inégalité $I_{n+1,n+1} \leq \frac{1}{2} I_{n,n}$ à partir de la question précédente, il fallait préciser que $I_{n,n}$ était positive.

9) Question peu et mal traitée. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs est peu identifié et surtout mal mis en ?uvre : il faut raisonner sur le terme général et pas sur les sommes partielles et encore moins sur la somme infinie ou la série. On ne peut pas écrire la somme de la série avant d'avoir prouvé sa convergence. Plus grave encore, certaines copies se contentent de justifier que le terme général tend vers 0 pour conclure.

10) **a)** L'équivalent $\ln(1 + x) \sim x$ est connu mais 20% des candidats qui l'obtiennent font ensuite une erreur de signe. On ne devrait plus voir d'équivalent à $0 \ldots$

b) Les équivalents ne passent pas à l'exponentielle sans justifications

c) Le calcul était compliqué mais par composition, on pouvait au moins avoir un équivalent de $(2n + 1)\,!$.

d) Question très peu traitée.