

Feuille_Act.7 : Etude de fonctions. Dérivées.

Ex 1 : Soit $f : x \mapsto \sqrt{e^{(x^2)} - 1}$.

- 1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
- 3) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Ex 2 : Soit $f : x \mapsto \sqrt{e^{(x^4)} - 1}$.

- 1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
- 3) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Ex 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

- 1) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) On admet que pour tout réel x on a l'encadrement : $0 \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$.

En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

Ex 4 : Construire les tableaux de variations des fonctions suivantes :

- a) $f : x \mapsto \arctan(2x^2 + 3)$ sur $\mathbb{R}$.
- b) $f : x \mapsto \sqrt[3]{2x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
- c) $f : x \mapsto \sin(3 \arctan(x))$ sur $\mathbb{R}$.
- d) $f : x \mapsto \sqrt[4]{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
- e) $f : x \mapsto x^5 - 10x$ sur $\mathbb{R}$.
- f) $f : x \mapsto \ln(\cos(x)) + 2x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Ex 5 : Montrer que pour tout réel x non nul on a : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$

($\operatorname{sgn}(x)$ est la fonction qui vaut -1 ou 1 suivant le signe du réel x)

Ex 6 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

et on note : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

- 1) Montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$ est stable par la fonction f .

En déduire que tous les termes de (u_n) sont dans l'intervalle I .

- 2) Montrer que si (u_n) est convergente elle converge vers le nombre d'or : $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- 3) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

- 4) En déduire que (u_n) est convergente.
- 5) Déterminer un entier n_0 pour lequel u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-5} près.
- 6) Donner la valeur de u_{n_0} que vous obtenez avec votre calculatrice.

Ex 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et par $f(0) = 0$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 8 : Déterminer la dérivée n -ième de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ex 9 : A l'aide du théorème des accroissements finis, établir pour $n \geq 1$ les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Ex 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-2x}$

- 1) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer f' et f'' .
- 3) Montrer que pour tout entier naturel n il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n) e^{-2x}$$

Ex 11 : On note $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Déterminer pour tout entier n la fonction $f^{(n)}$.

Ex 12 : *G2E 2023 et DS2 BCPST 2C 2025.*

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}}$

- 1) a. Démontrer que f réalise une bijection strictement décroissante de $[0, 1]$ dans lui-même.
b. En déduire que : $\forall x \in [0, 1], (1-x)e^x \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$
- 2) On fixe un réel α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$ et on considère les deux suites ci-dessous définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n^{-\alpha} \text{ et } y_n = f(x_n).$$

- a. Justifier que : $\forall x \in [0, x_n], y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq (1-x)e^x$.
 - b. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n} = +\infty$.
 - c. Rappeler le développement limité de $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 3 et en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^n = 1$.
- 3) On pose :

$$I_n = \int_0^1 ((1-x)e^x)^n dx.$$

- a. Démontrer que : $y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx$
- b. En utilisant un changement de variable simple, en déduire :

$$y_n^n \int_0^{x_n \sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq I_n \sqrt{n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

c. (pour les 5/2)

En utilisant une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, déduire de ce qui précède que :

$$I_n \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$