Feuille Act_8 : Développements limités.

Ex 1 : Déterminer les développements limités suivants.

Tableau 1 : $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Tableau 2 : $DL_3(0)$ de $x \mapsto (e^{-x} - 2)^2$

Tableau 3 : $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$.

Tableau 4 : $DL_3(0)$ de $x \mapsto \tan(x)$.

Tableau 5 : $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x^2)$

Tableau 6 : $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Ex 2 : Calculer les limites suivantes :

Tableau 1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Tableau 2 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x(1 - \cos(x))}$

Tableau 3 : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

Tableau 4 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}$.

Tableau 5 : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

Tableau 6 : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x \tan(x)} \right)$

Ex 3 : Déterminer le développement en 0 d'ordre 4 de la fonction suivante : $x \mapsto \frac{1}{2+x}$

Ex 4 : Déterminer le $DL_5(0)$ de : $f(x) = e^{(x^2)} - 1 - \sin(x^2)$, En déduire un équivalent en 0 de $f(x)$.

Ex 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f en 0
- 3) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 4) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.
- 5) Quelle est la position relative de C_f et de T au voisinage de 0?

Ex 6 : On note f la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-2x)}{1+x}$,

- 1) Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f .
- 2) En déduire l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.
- 3) Déterminer la position relative de T et C_f au voisinage de 0.
- 4) Donner l'allure de T et C_f au voisinage de 0.

Ex 7 : On note A la fonction dérivable sur $] -1; 1[$ vérifiant $A(0) = 0$ et :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad A'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Déterminer un DL en 0 d'ordre 3 de $A(x)$.

Ex 8 : On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ définie sur $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Ex 9 : En utilisant le DL usuel de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0, déterminer le $DL_{10}(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

En déduire le $DL_{11}(0)$ de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

Ex 10 : Le but de cet exercice est déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3} \right)^n$$

- 1) Déterminer un DL₁(0) de la fonction $x \mapsto 3(2^x) - 2(3^x)$.
- 2) En déduire un équivalent en 0 de $\ln(3(2^x) - 2(3^x))$.
- 3) En déduire la limite en 0 de $(3(2^x) - 2(3^x))^{\frac{1}{x}}$
- 4) Conclure.

Ex 11 : On admet le résultat suivant :

Si f une fonction de la forme $f(x) = \frac{1}{1 - u(x)}$
 avec $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ et $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$)
alors $f(x) = R(x) + o(x^n)$
 où R est le polynôme obtenu en conservant les termes d'ordre $\leq n$ de $\sum_{k=0}^n (P(x))^k$

- 1) Déterminer le DL₃(0) de $f(x) = \frac{2}{1 + \sin(x)}$.
- 2) Déterminer le DL₄(0) de $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.
- 3) Déterminer le DL₃(0) de $f(x) = \frac{2}{1 + e^x}$.

Ex 12 : Compléter et donner des exemples :

❶ pour $0 \leq p < n$, $x^{\dots} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{\dots})$

Exemples :

❷ pour $(p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que : $n + p \geq 0$ $x^n o(x^p) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{\dots})$

Exemples :

❸ pour n et p deux entiers naturels, $o(x^n) + o(x^p) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{\dots})$

Exemples :

❹ pour n et p deux entiers naturels, $o(x^n) \times o(x^p) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{\dots})$

Exemples :

❺ pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $0 \leq p < n$, si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{\dots})$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{\dots})$.

Exemples :