Correction de la feuille_Act_6 : Fonctions usuelles

Ex 1 : On sait que $10^5 < 125635 < 10^6$ or la fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $5 < \log(125635) < 6$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\lfloor \log(125635) \rfloor = 5}$$

Ex 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$, $(-x \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \\ &= \frac{\dfrac{1}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x}+1} \\ &= \frac{1-e^x}{1+e^x} \quad = \quad -f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$$

Soit $x \in]-1;1[$, $(-x \in]-1;1[)$

$$\begin{aligned} g(-x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est impaire.}}$$

Ex 3 : 1) • $\lfloor x \rfloor = x - \dfrac{1}{2} \iff x - \lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$ *En traçant les deux courbes.*

$$\boxed{S_{(E)} = \left\{ k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Pour être plus rigoureux : on étudie la fonction $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor - x + \dfrac{1}{2}$.

il est assez rapide de démontrer que f est périodique de période 1
et ensuite il suffit de résoudre sur $[0, 1[$.

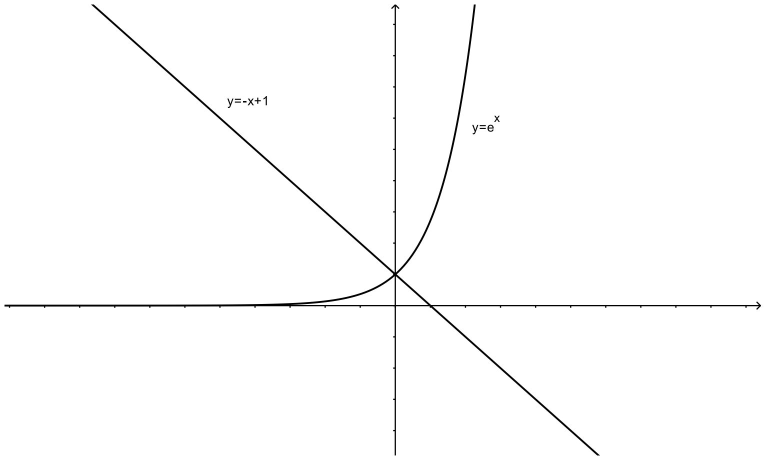
• $|x| \leqslant x^4$ *En traçant les deux courbes.*

$$\boxed{S_{(I)} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[}$$

Pour être plus rigoureux on peut résoudre sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$ séparément.
sur $\mathbb{R}_-$, l'inéquation devient $-x \leqslant x^4$ et sur $\mathbb{R}_+$, l'inéquation devient $x \leqslant x^4$

2) • $(E_1) : e^x + x - 1 = 0 \iff e^x = -x + 1$

En traçant on peut faire la conjecture qu'il n'y a qu'une seule solution, comme 0 est une solution évidente,



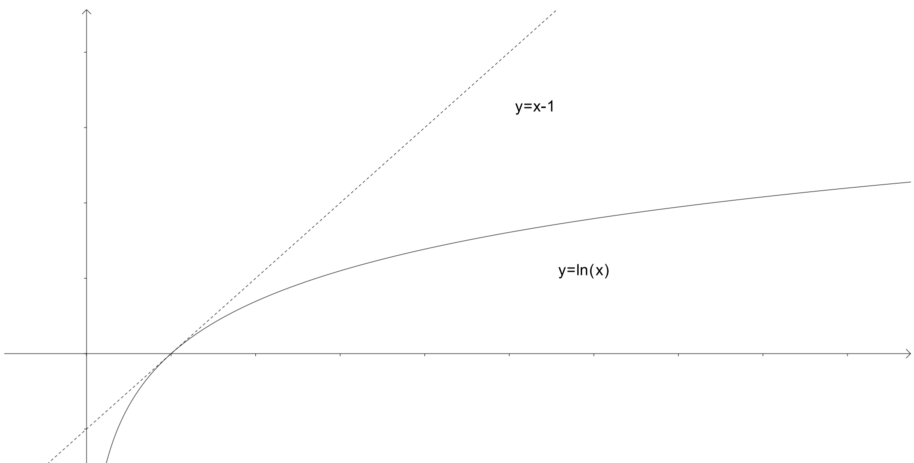
$$\boxed{e^x + x - 1 = 0 \iff x = 0}$$

Pour être plus rigoureux : on étudie la fonction $f : x \longmapsto e^x + x - 1$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
De plus cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
donc f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.
or on remarque que $f(0) = 0$ donc on a : $\quad f(x) = 0 \iff x = 0$

• $\ln(x) = x - 1$

En traçant on peut faire la conjecture qu'il n'y a qu'une seule solution, comme 1 est une solution évidente,



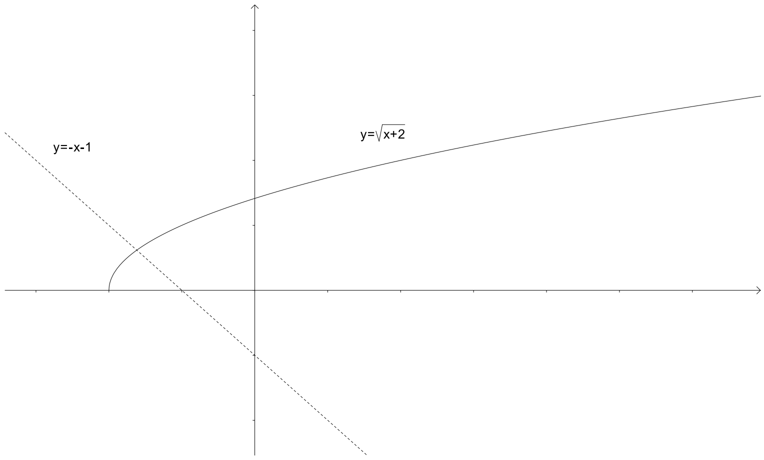
$$\boxed{\ln(x) = x - 1 \iff x = 1}$$

Pour être plus rigoureux : on étudie la fonction $f : x \longmapsto \ln(x) - x + 1$.

Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$

On peut alors tracer le tableau de variations de f qui permet de justifier $\quad f(x) = 0 \iff x = 1$

$\sqrt{x+2}+x+1=0 \iff \sqrt{x+2}=-x-1$



Un petit calcul ...

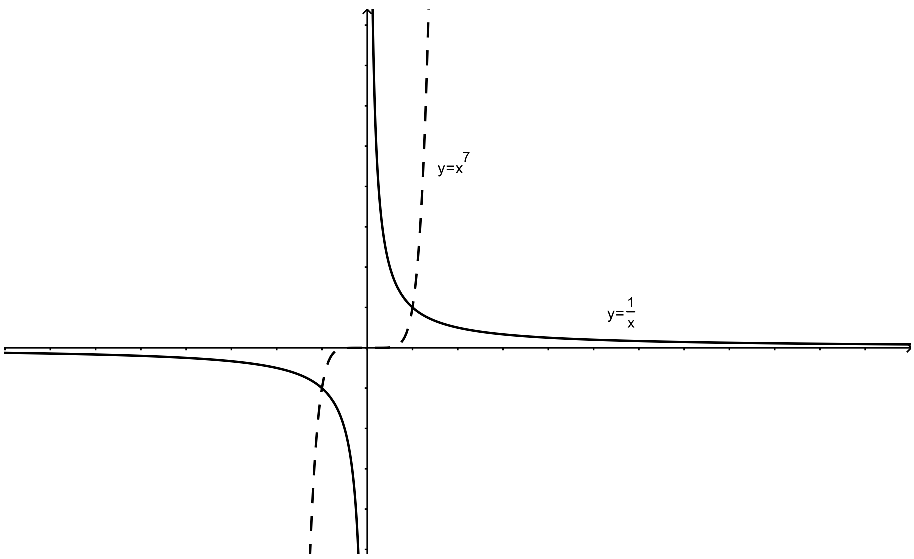
$$\boxed{\sqrt{x+2}+x+1=0 \iff x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Raisonnement par équivalence.
Pour $x \in [-2;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}+x+1=0 &\iff \sqrt{x+2}=-x-1\\
&\iff x+2=(-x-1)^2 \quad \text{et} \quad -x-1 \geqslant 0\\
&\iff x^2+x-1=0 \quad \text{et} \quad x \leqslant -1\\
&\iff \left(x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \quad \text{et} \quad x \leqslant -1\\
&\iff x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ est l'unique solution de l'équation : } \sqrt{x+2}+x+1=0$$

3) (I_1) : $\dfrac{1}{x} < x^7$



$$\boxed{S_1 =]-1;0[\cup]1;+\infty[}$$

(I_2) (*Non fait en classe.*)

$$\boxed{\left|x^2-1\right| \leqslant x \iff x \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]}$$

Ex 4 : 1) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} x^x = x^2 &\iff \exp(x\ln(x)) = \exp(2\ln(x)) \\ &\iff x\ln(x) = 2\ln(x) \\ &\iff (x-2)\ln(x) = 0 \\ &\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{1;2\}}$$

$\boxed{\text{Exercice modifié}}$: "résoudre sur $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x \geqslant 0$ " :

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x \geqslant 0 &\iff e^x\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right) \geqslant 0 \\ &\iff \left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right) \geqslant 0 \qquad \text{car } e^x > 0 \end{aligned}$$

Et avec un tableau de signes on obtient :

$$\boxed{S =]-\infty;0] \cup [\ln(2);+\infty[}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{x+3}{x-1}\right) < 2 &\iff \frac{x+3}{x-1} < \ln(2) \\ &\iff \frac{x+3}{x-1} - \ln(2) < 0 \\ &\iff \frac{(1-\ln(2))x + 3 + \ln(2)}{x-1} < 0 \end{aligned}$$

et avec un tableau de signes en sacahnt que $1 - \ln(2) > 0$

$$\boxed{S = \left]\ \tfrac{\ln(2)+3}{\ln(2)-1}\ ;\ 1\ \right[}$$

Soit x un réel, $\quad 4^x - 2^x - 2 \leqslant 0 \iff \left(2^x\right)^2 - 2^x - 2 \leqslant 0$
or on a : $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ donc $4^x - 2^x - 2 = \left(2^x + 1\right)\left(2^x - 2\right)$
et comme $2^x + 1 > 0$

$$4^x - 2^x - 2 \leqslant 0 \iff 2^x \leqslant 2$$

$$\boxed{S =]-\infty;1]}$$

3) Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} |\log(x) - 1| = 2 &\iff \log(x) - 1 = 2 \quad \text{ou} \quad \log(x) - 1 = -2 \\ &\iff \log(x) = 3 \quad \text{ou} \quad \log(x) = -1 \\ &\iff x = 1000 \quad \text{ou} \quad x = 0{,}1 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{\,0{,}1\,;\,1000\,\}}$$

Sachant que 2 et 3 sont les racines de $X^2 - 5X + 6$

donc pour $x > 0$, $\quad x^{1/3} - 5\,x^{1/6} + 6 = 0 \iff x^{1/6} = 2$ ou $x^{1/6} = 3$.

$$\boxed{S = \{\,2^6\,;\,3^6\,\} = \{\,64\,;\,729\,\}}$$

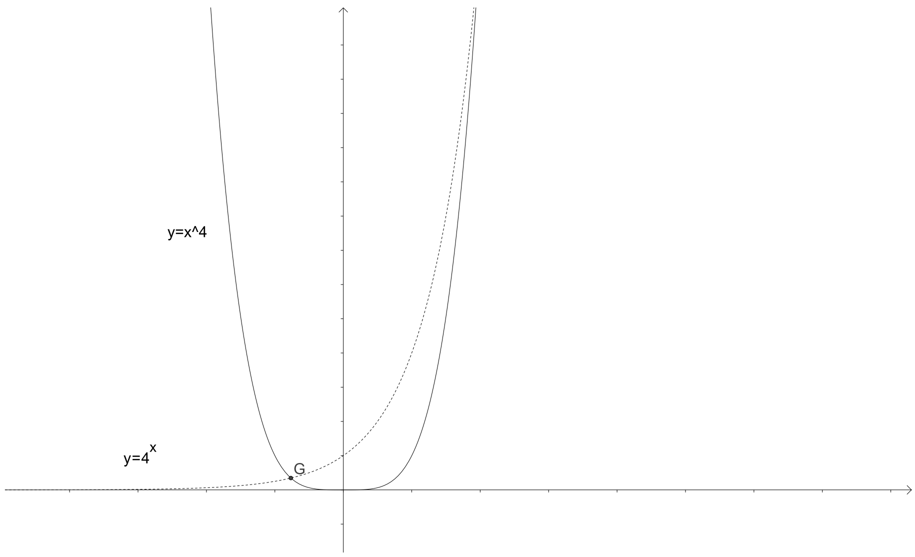
4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $y = \ln(x)$

$$\begin{aligned} (\ln(x))^2 - \ln\left(x^2\right) - 3 = 0 &\iff y^2 - 2y - 3 = 0 \\ &\iff (y+1)(y-3) = 0 \\ &\iff y = -1 \quad \text{ou} \quad y = 3 \\ &\iff \ln(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{e^{-1};e^3\right\}}$$

• $x^4 = 4^x$.

Allure des deux courbes :



Il existe une et une seule solution sur $\mathbb{R}_-$, graphiquement on trouve environ : $-0{,}8$.

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} 4^x = x^4 &\iff \exp(x\ln(4)) = \exp(4\ln(x)) \\ &\iff x\ln(4) = 4\ln(x) \\ &\iff \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(4)}{4} \end{aligned}$$

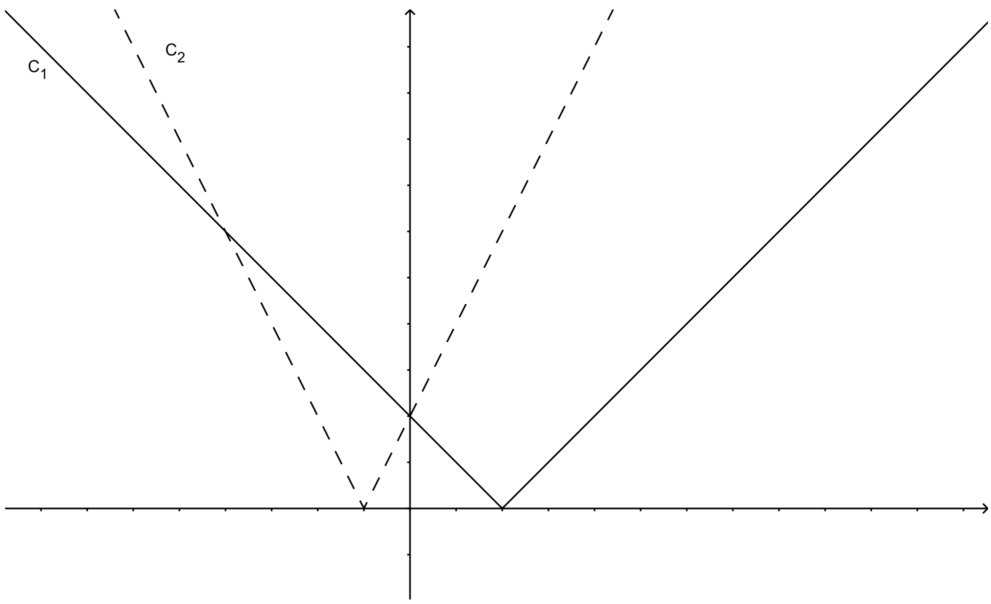
L'étude de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ montre que $\dfrac{\ln(4)}{4}$ admet exactement deux antécédents par f sur $\mathbb{R}_+^*$.

On remarque que : $\dfrac{\ln(2)}{2} = \dfrac{\ln(4)}{4}$

$$\boxed{S = \{\alpha; 2; 4\} \quad \text{avec} \quad \alpha \approx -0{,}8}$$

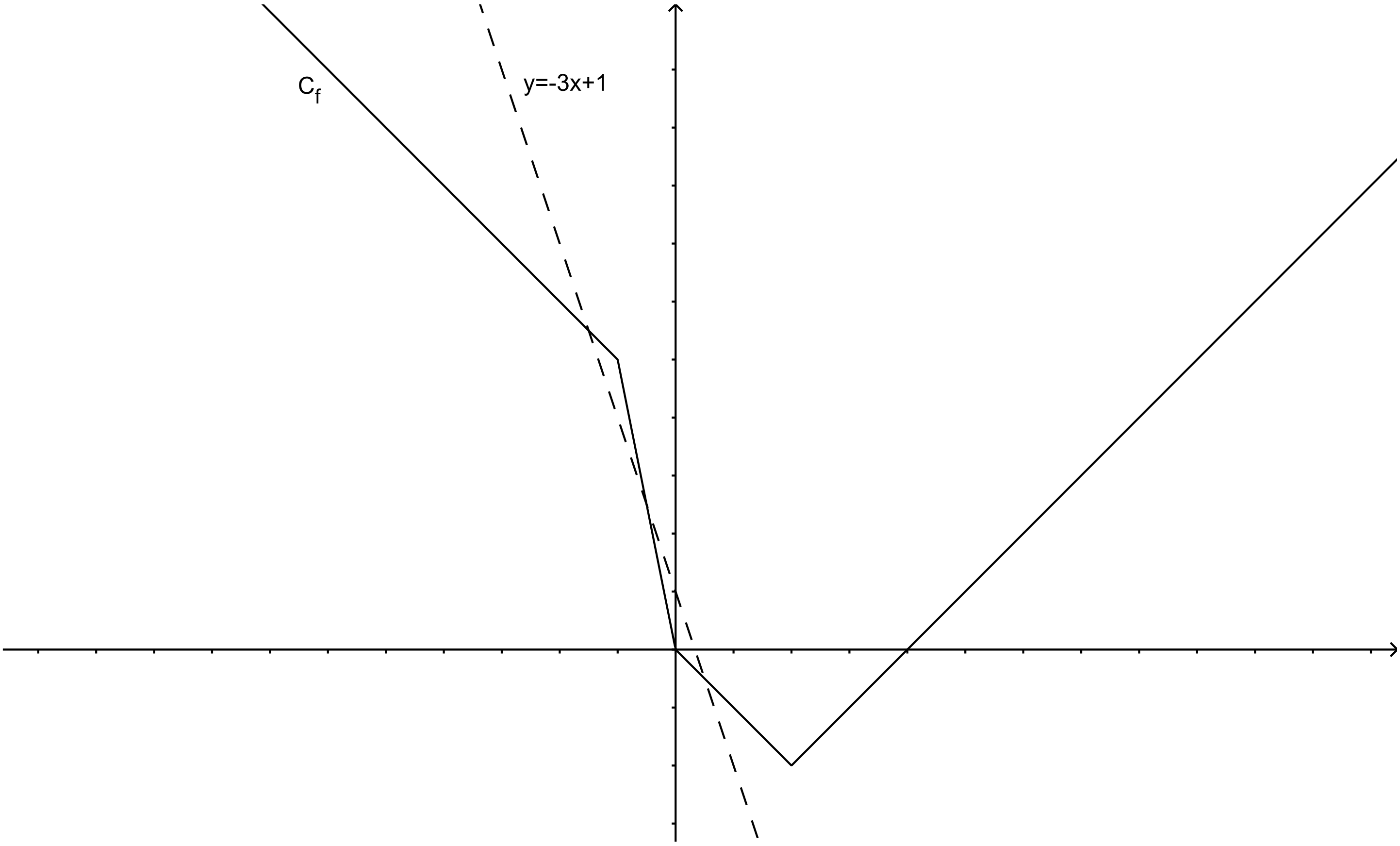
Ex 5 :

$C_1 :\ y = |x-2|$ $\qquad$ $C_2 :\ y = |2x+2|$



$$\boxed{S = \{-4; 0\}}$$

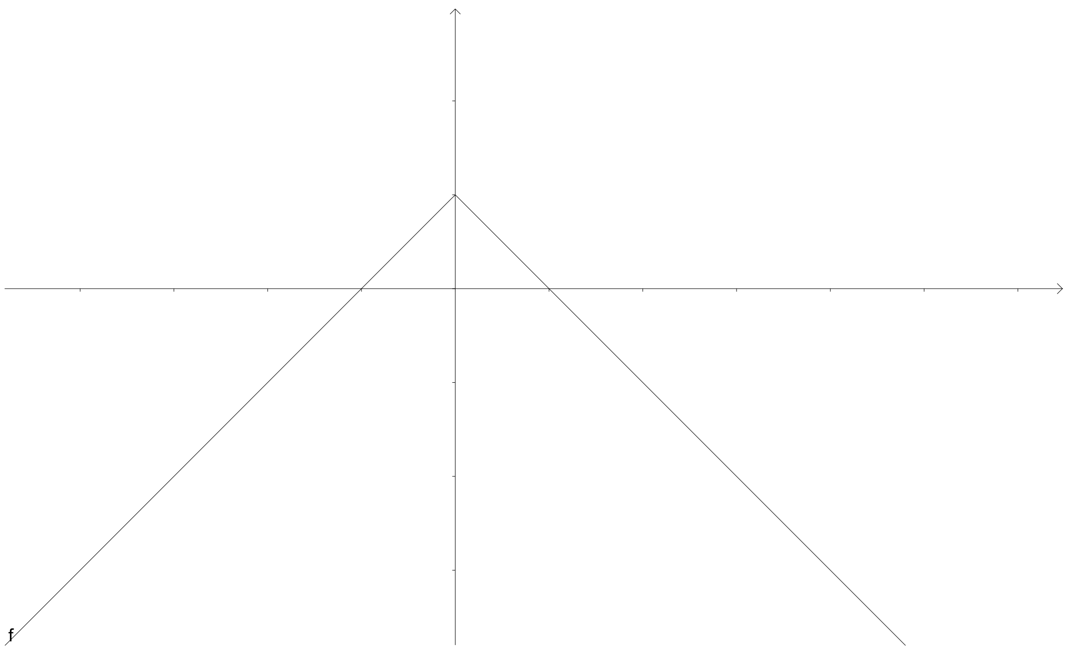
Ex 6 : Allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto |x-2| + |2x| - 2|x+1|$



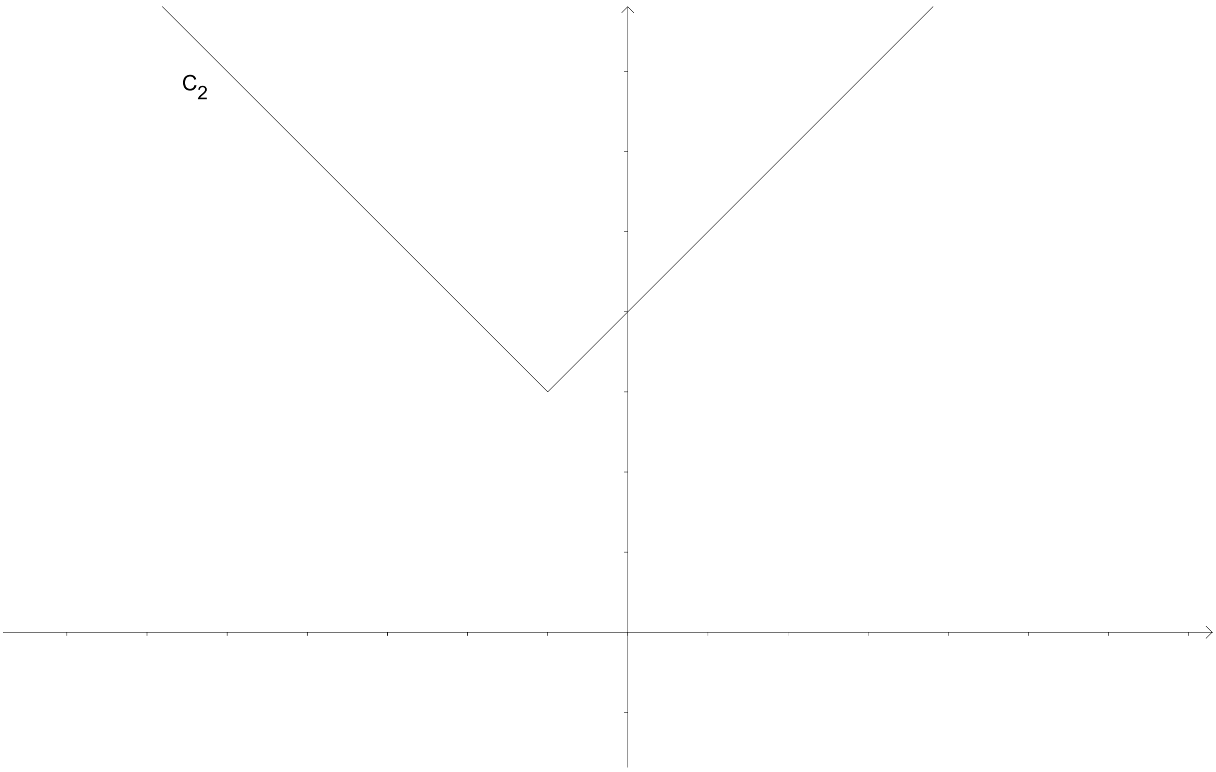
L'ensemble des solutions de l'équation : $|x-2| + |2x| - 2|x+1| = -3x+1$ est :

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}}$$

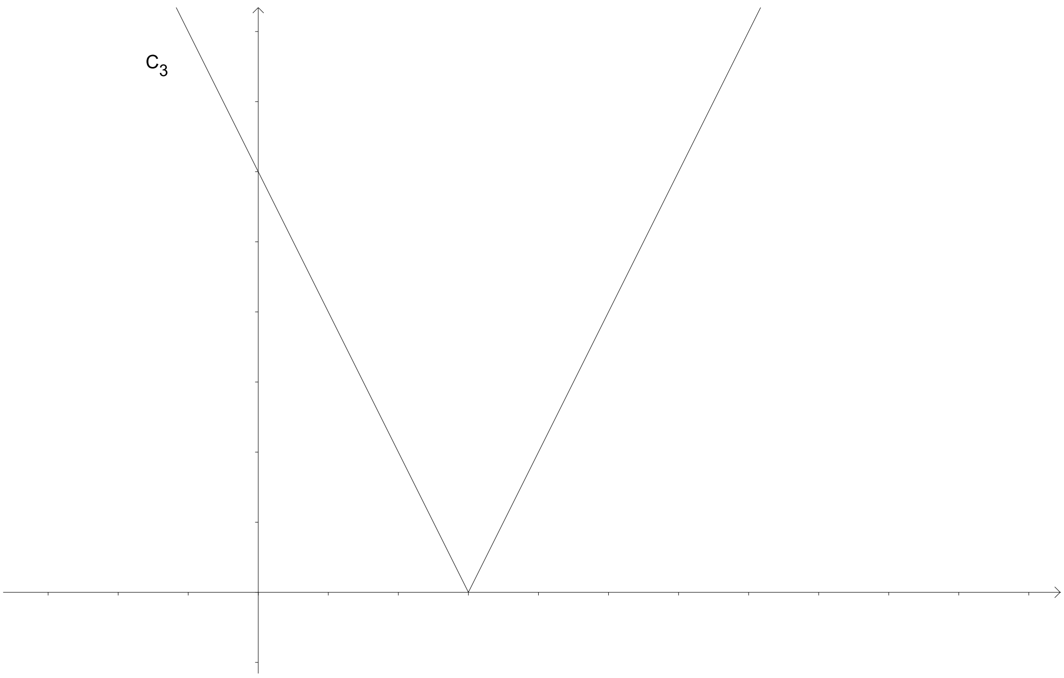
Ex 7 : 1) $f_1 : x \longmapsto 1 - |x|$



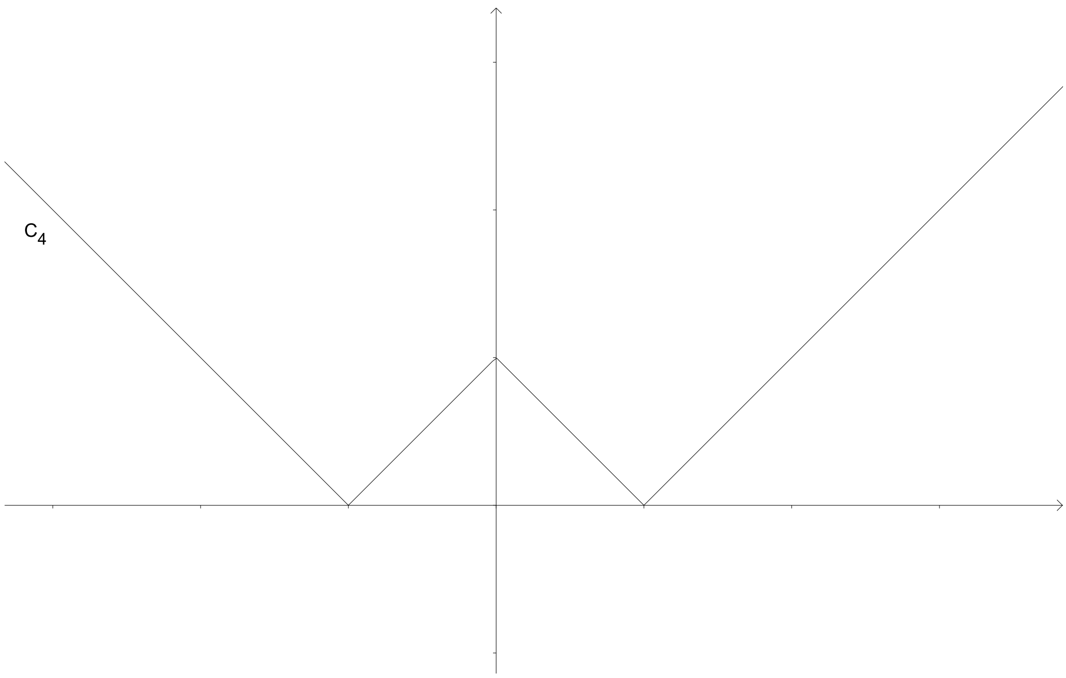
$f_2 : x \longmapsto |x+1| + 3$



$f_3 : x \longmapsto 2|x-3|$

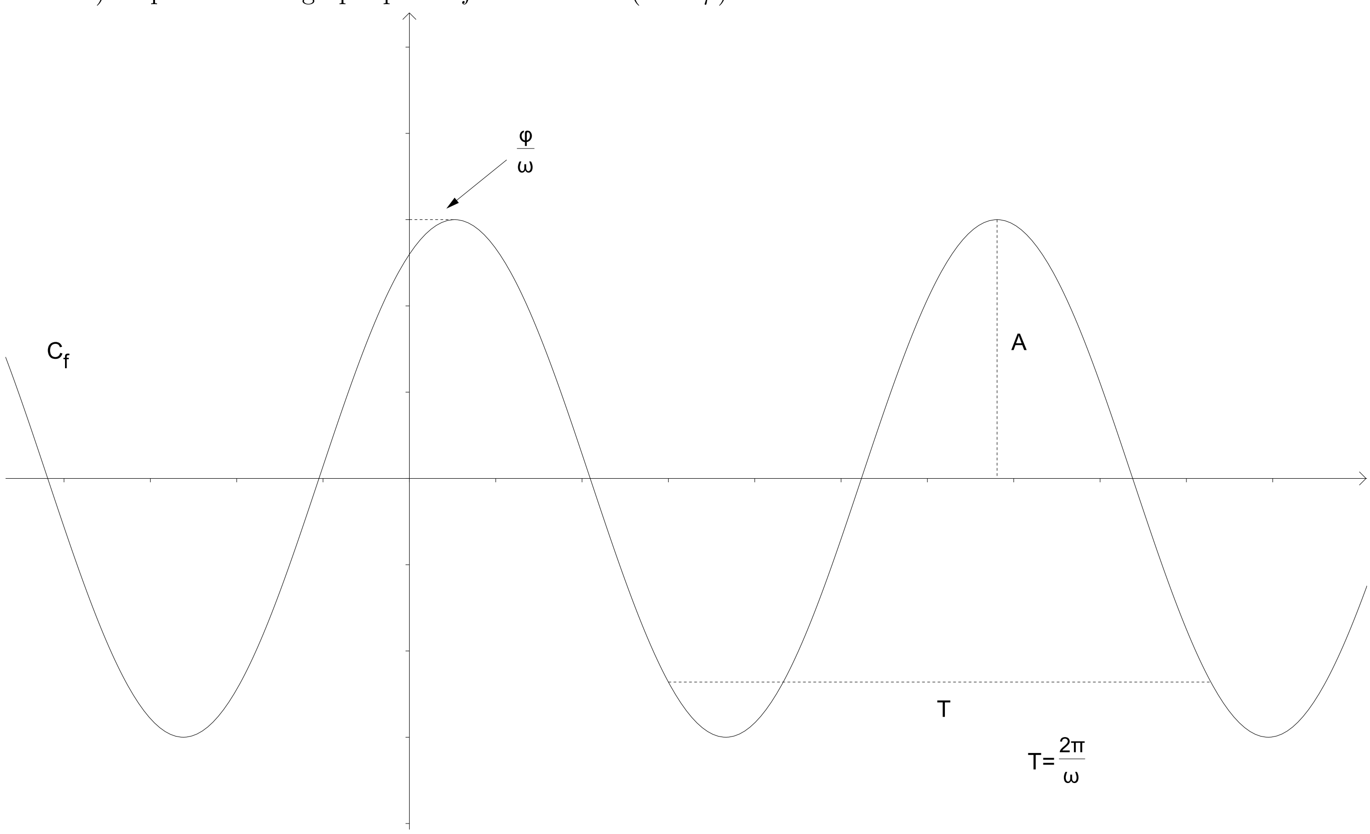


$f_4 : x \longmapsto \left| \, |x| - 1 \right|$.



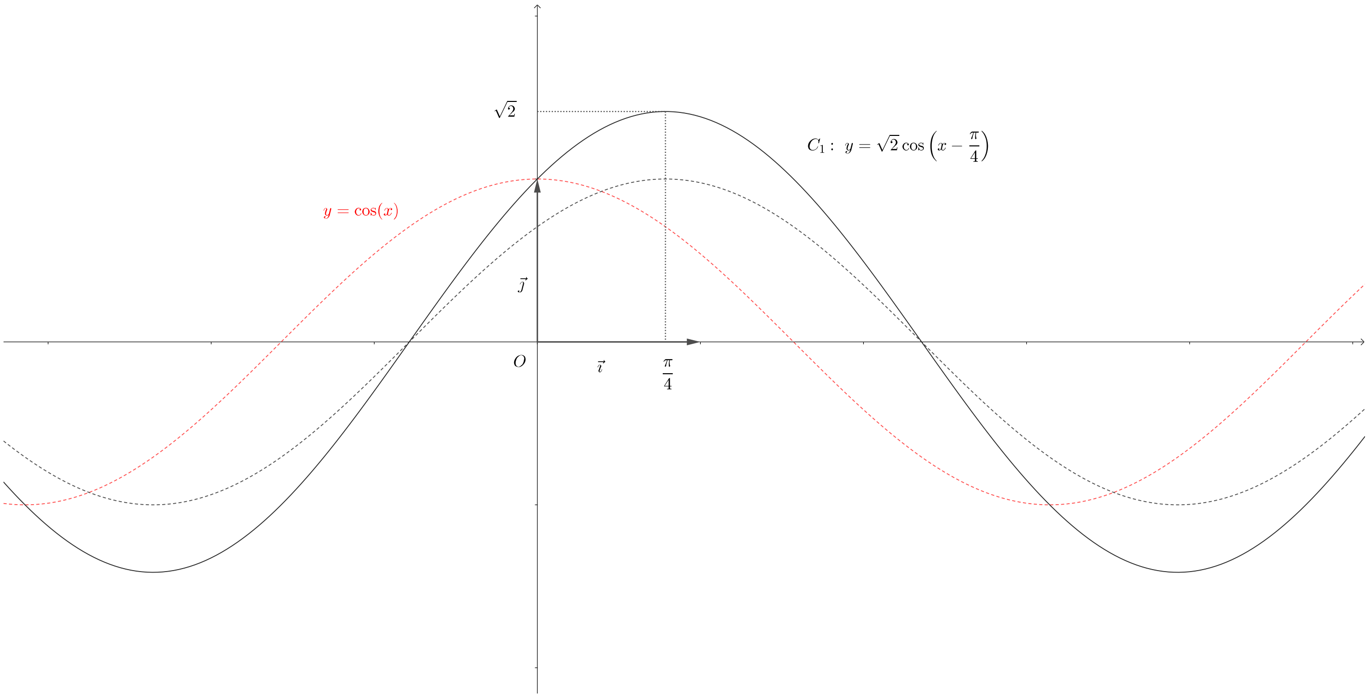
2) (*non corrigé*)
3) (*non corrigé*)

4) Représentation graphique de $f : t \longmapsto A \cos(\omega t - \varphi)$

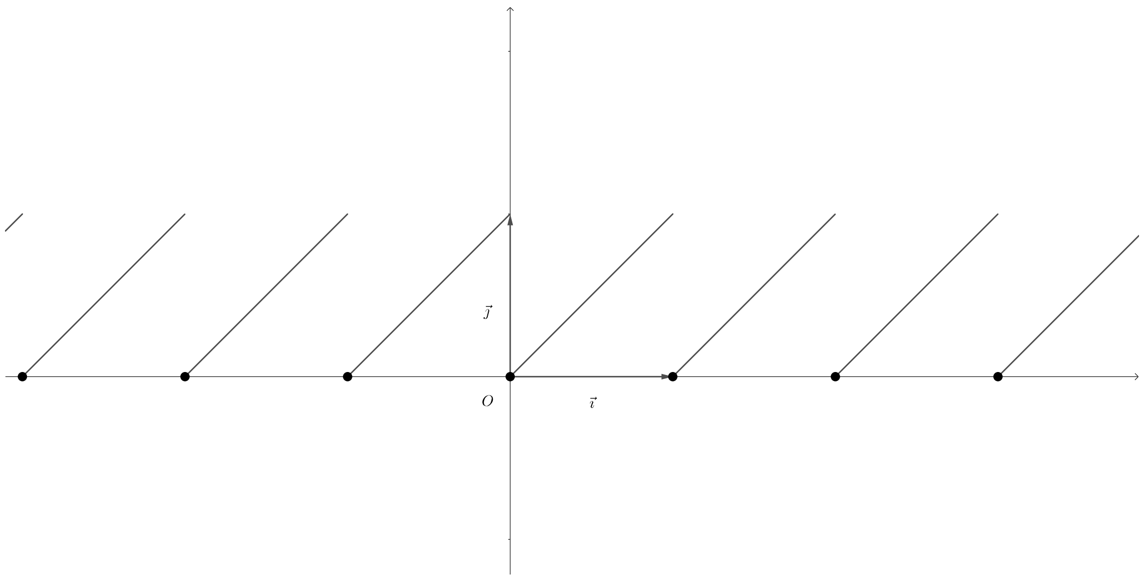


Ex 8 : (*non corrigé*)

Ex 9 : On remarque que : $C_1 : y = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Pour C_2 on utilise la périodicité de la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.



Ex 10 : ① $x \mapsto |x| + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

② $\boxed{\text{En } 0}$: pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x) = 1$ et comme on a de plus $f(0) = 1$ on a bien

f est continue en 0.

$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}^*}$: $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ donc

f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

③ $\boxed{\text{En } 0}$: pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f(x) = \dfrac{1}{2}$

(taux d'acroissement de $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 1),

et comme on a de plus $f(0) = \dfrac{1}{2}$ on a bien

f est continue en 0.

$\boxed{\text{Sur } [-1;\, 0\,[\cup]\,0\,;+\infty[}$: $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ est le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ donc

f est continue sur $[-1;\, 0\,[\cup]\,0\,;+\infty[$.

En conclusion :

$\boxed{f \text{ est continue sur } [-1;+\infty[.}$

Ex 11 : 1) La fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty;0]$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $f(0) = -1$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer qu'il existe une solution de $f(x) = 0$ sur $]-\infty;0]$.
On a de même f est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer qu'il existe une solution de $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$.
En conclusion :

$\boxed{f \text{ possède au moins deux racines réelles}}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 8x^7 + 2x + 2$
sur l'intervalle $[0,1]$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,1]$.

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$,
de plus $f(0) = -1$ (< 0) et $f(1) = 3$ (> 0)
donc

$\boxed{\text{il existe une unique racine } \alpha \text{ de } f \text{ vérifiant } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1}$

3) (*non corrigé*)

Ex 12 : La fonction f est continue sur $]\,0;1[$ comme quotient de fonctions continues, il suffit donc ici de vérifier si elle est prolongeable par continuité en 0 et en 1 pour conclure.
En 0 : sachant que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc f prolongeable par continuité en 0.
En 1 : sachant que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$, on a $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$ donc f prolongeable par continuité en 1.

$\boxed{f \text{ est prolongeable en une fonction continue sur } [\,0;1]. \quad \text{(En posant } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = -1\text{)}}$

Ex 13 : 1) La fonction f est dérivable $]0,2[$ car c'est le produit des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto e^x$ qui sont dérivables sur $]0,2[$ et $\forall x \in]0,2[$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{2e^x}{x^3}$ ou encore $f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ (< 0)

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,2[$,
donc f réalise une bijection de $]0,2[$ sur $]\lim\limits_{2} f; \lim\limits_{0} f[$.

de plus, $\lim\limits_{2} f = \dfrac{e^2}{4}$ et $\lim\limits_{0} f = +\infty$ donc

$\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]0,2[\text{ sur } \left]\dfrac{e^2}{4};+\infty\right[}$

2) Pour un entier $n \geqslant 2$,
on a : $n \in \left]\dfrac{e^2}{4};+\infty\right[$, donc d'après le résultat de la question précédente

(et la définition d'une bijection)

$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 2, \text{ l'équation } f(x) = n \text{ admet une unique solution sur }]0,2[, \text{ (notée } u_n)}$

3) *En classe on a utilisé la réciproque en remarquant que $u_n = f^{-1}(n)$, mais ici on montre une autre approche.*
Soit un entier $n \geqslant 2$,
on sait que : $u_n, u_{n+1} \in]0,2[$, $\quad f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ $\quad$ (en effet : $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n+1$)
et comme f est strictement décroissante sur $]0,2[$ on en déduit que : $u_n \geqslant u_{n+1}$
ceci étant vrai pour tous les entiers $n \geqslant 2$, on a :

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$.
Si ℓ était > 0 alors $(f(u_n))$ convergerait vers $f(\ell)$ (car f est continue sur $]0,2[$).
Mais $f(u_n) = n$ donc $(f(u_n))$ ne converge pas et ainsi : $\ell \leqslant 0$ et

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$$

Ex 14 : *(non corrigé)*

Ex 15 : On note g la fonction $x \longmapsto f(x) - x$,
g est une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$,
de plus $\;g(0) = f(0) \geqslant 0\;$ et $\;g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0\quad$ (car $\;f([0,1]) \subset [0,1]$)

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g sur l'intervalle $[0,1]$, on peut affirmer qu'il existe au moins un réel c dans $[0,1]$, $\quad$ vérifiant $\;g(c) = 0$,
on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe.}}$$

Ex 16 : *(non corrigé)*

Ex 17 : *(non corrigé)*

Ex 18 : (*Nous avons souvent vu cet encadrement, il y a plusieurs façon de l'obtenir.*)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,
En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f : t \longmapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x; x+1]$,

$$\exists c \in [\,x\,;\,x+1], \qquad f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}$$

ce qui donne : $\ln(x+1) - \ln(x) = f'(c) = \dfrac{1}{c}$

de plus $\;c \in [\,x\,;\,x+1]\;$ et $\;f'(c) = \dfrac{1}{c}\;$ donc $\;\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{x}\qquad$ (car $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$).

On obtient bien :

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \qquad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}}$$

Ex 19 : *(non corrigé)*

Ex 20 : On numérote les racines de P de sorte que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$,
La fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P(x_k) = P(x_{k+1})$ donc on peut appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ pour k allant de 1 allant à $n-1$.
Il vient que P' possède une racine sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$ et ainsi P' possède $n-1$ racines distinctes
de plus $\deg(P') = n-1$ donc P' ne peut avoir strictement plus de $n-1$ racines
En conclusion :

$$\boxed{P' \text{ admet exactement } n-1 \text{ racines distinctes.}}$$

Ex 21 : *(non corrigé)*