Correction feuille_Act_7 : Etude de fonctions. Dérivées.

Ex 1 : *(non corrigé)*

Ex 2 : *(non corrigé)*

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 0$.

Donc la fonction f est constante sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

et comme $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $f(1) = \frac{\pi}{2}$ on obtient bien :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ non nul on a : } \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}}$$

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : *(non corrigé)*

Ex 8 : *(non corrigé)*

Ex 9 : Soit un entier $n \geqslant 1$,

La fonction $f : x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $[n; n+1]$ donc (*en appliquant le théorème des accroissements finis*) il existe $c \in [n, n+1]$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

de plus $c \in [n, n+1]$ et $f'(c) = -\frac{1}{c\sqrt{c}}$ donc $-\frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant f'(c) \leqslant -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

(car $x \longmapsto -\frac{1}{x\sqrt{x}}$ est croissante sur $[n, n+1]$).

On obtient bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}}$

Ex 10 : *(non corrigé)*

Ex 11 : *(non corrigé)*

Ex 12 : *(non corrigé)*