Correction de la feuille Act_8 : Développements limités.

Ex 1 : *(Je ne mets pas toujours les détails des calculs)*
Tableau 1 :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \qquad \text{et} \qquad e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

donc

$$\boxed{\frac{e^x-e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

Tableau 2 :
Première approche :
$e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ donc

$$\begin{aligned}(e^{-x}-2)^2 &= \left(-1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(-1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x+x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

$$\boxed{(e^{-x}-2)^2 \underset{x\to 0}{=} 1+2x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}$$

Deuxième approche sur idée d'Alexane.

$$(e^{-x}-2)^2 = e^{-2x}-4e^{-x}+4$$

or $\quad e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \quad$ et $\quad e^{-2x} \underset{x\to 0}{=} 1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$
donc

$$\boxed{(e^{-x}-2)^2 \underset{x\to 0}{=} 1+2x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}$$

Tableau 3 : $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$, c'est un DL(0) usuel :

$$\sqrt[3]{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{3}\times x+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)x^2++\frac{1}{3!}\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)x^3+o(x^3)$$

$$\boxed{\sqrt[3]{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+o(x^3)}$$

Tableau 4 : Plusieurs approches possibles.
• *Ce qu'on a fait au tableau*
On note f la fonction tangente ; elle est de classe C^∞ et pour x au voisinage de 0,

$f(x)=\tan(x)$, $\quad f'(x)=1+\tan^2(x) \quad f''(x)=2\tan(x)+2\tan^3(x) \quad f^{(3)}(x)=2+8\tan^2(x)+6\tan^4(x)$

on en déduit :

$$f(0)=0 \qquad f'(0)=1 \qquad f''(0)=0 \qquad f^{(3)}(0)=2$$

La formule de Taylor-Young donne

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

• *Une autre approche très classique que semble connaître Owen, mais difficile pour nous.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1-u(x)} \qquad \text{avec } u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

• *Une troisième approche, plus astucieuse et vue en classe.*

Comme la fonction tan est impaire et de classe C^∞ on sait qu'il existe a, b tels que :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + o(x^3)$$

on a alors : $\tan(x) \times \cos(x) \underset{x\to 0}{=} (ax + bx^3)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)$

donc $\tan(x) \times \cos(x) \underset{x\to 0}{=} ax + \left(-\frac{a}{2} + b\right) x^3 + o(x^3)$

or $\tan(x) \times \cos(x) = \sin(x)$ et le DL est unique donc :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -\dfrac{a}{2} + b = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

on trouve : $a = 1$ et $b = \dfrac{1}{3}$ et

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

Tableau 5 : (Non corrigé)

Tableau 6 : (Non corrigé)

Ex 2 : *Tableau 1 :*

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}}$$

Tableau 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} &= \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)}{x\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{-\frac{x^3}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = -\frac{2}{3}}$$

Ex 3 : *(Non corrigé)*

Ex 4 : *(Non corrigé)*

Ex 5 : *(Non corrigé)*

Ex 6 : On sait d'une part que : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ on a donc $\ln(1-2x) \underset{x\to 0}{=} -2x - 2x^2 - \dfrac{8}{3}x^3 + o(x^3)$

et d'autre part on a : $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, ce qui nous permet d'obtenir :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

1) Le calcul préliminaire permet d'affirmer que $f(x) \underset{x\to 0}{=} -2x + o(x)$, on peut alors affirmer que f est dérivable en 0 et que :

$$\boxed{\text{La droite } T : y = -2x \text{ est la tangente à } C_f \text{ au point d'abscisse } 0.}$$

2) Le calcul préliminaire donne $f(x) - (-2x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{8}{3}x^3$

Connaissant le signe de $-\dfrac{8}{3}x^3$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, la courbe } C_f \text{ est au-dessus de } T \text{ à gauche de 0 et en dessous de } T \text{ à droite.}}$$

3) *(Fait au tableau)*

Ex 7 : On sait que : $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \underset{t\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}t + o(t)$ et en substituant $-x^2$ à t (qui tend bien vers 0) on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

comme la fonction A est C^1 au voisinage de 0 on obtient par intégration : $A(x) \underset{x\to 0}{=} A(0) + x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$$\boxed{A(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

Ex 8 : *(Non corrigé)*

Ex 9 : *(Non corrigé)*

Ex 10 : *(Non corrigé)*

Ex 11 : *(Non corrigé)*

Ex 12 :

❶ pour $0 \leqslant p < n$, $x^n \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ En effet : $x^{n-p} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Exemples : $x^3 = o(x^2)$

❷ pour $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que : $n + p \geqslant 0$ $x^n o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$ En effet : $x^n \varepsilon(x) x^p = \varepsilon(x) x^{n+p}$.

Exemples : $x^3 o(x^2) = o(x^5)$

❸ pour n et p deux entiers naturels , $o(x^n) + o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^{\min(n,p)})$

Exemples : $o(x^3) + o(x^2) = o(x^2)$

❹ pour n et p deux entiers naturels, $o(x^n) \times o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$

Exemples : $o(x^3) \times o(x^2) = o(x^5)$

❺ pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $0 \leqslant p < n$, si $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$ alors $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^p)$.

En effet : si $f(x) = \varepsilon(x) x^n$ *alors* $f(x) = \varepsilon(x) x^{n-p} x_p$

Exemples : Si on sait que $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^3)$ alors $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$