BCPST2$_A$ *(Lundi 6 octobre 2025)* Nom :

Prénom :

Interrogation **(Sujet A)** (25 minutes)

SJ Donner le tableau de variations complet de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.
Au tableau avec la dérivée : $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

/3pt

SJ Soit f une fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et de tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0

$$f\left(\left]0\,;+\infty\right[\right) = \left]-\infty\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \qquad f\left(\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[\right) = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ possède exactement 2 solutions sur $]0;+\infty[$

/3pt

AJ On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, e^2[$.

– –

Pour $x \in]0, e^2[$, $\quad f(x) = 0 \iff \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$ *(qui appartient bien à $]0, e^2[$)*

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]0, e^2[}$

– –

Nouvel énoncé : Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $]0, e^2[$.

– –

f est dérivable sur $]0, e^2[$ et $\forall x \in]0, e^2[$, $f'(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} \quad > 0$ sur $]0, e^2[$.
f est continue et strictement croissante sur $]0, e^2[$ donc réalise une bijection de $]0, e^2[$ dans $]\lim\limits_{0} f; \lim\limits_{e^2} f[$
$=]-\infty; 2/e[$
or $\frac{1}{2} \in]-\infty; 2/e[$ donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]0, e^2[}$

/3pt

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2+x^3} = -1$ En effet : $\ln(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$ et $x^2 + x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$..................................

- $\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x) - x = -\infty$ En effet : $2\ln(x) - x = -x\left(1 - \dfrac{2\ln(x)}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
croissance comparée

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - x^2}{x^2+x+1} = -1$ En effet : $e^x - x^2 \underset{x\to -\infty}{\sim} -x^2$ et $x^2 + x + 1 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$............................

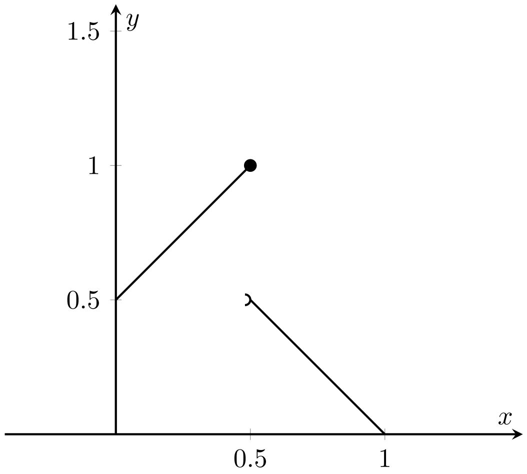
/3pt

Dire que la fonction f est bijective de $\left[0,1\right]$ dans $\left[0,1\right]$ signifie que :

$$\forall y \in [0,1], \exists ! x \in [0,1] : \ f(x) = y$$

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ alors $f(x) = x + \frac{1}{2}$ et si $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ alors $f(x) = 1 - x$



Affirmation : La fonction f est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$ Vrai ■ Faux ☐

Explication :
Toute droite horizontale d'équation $y = c$ pour $c \in [0,1]$ coupe la courbe de f en un et un seul point.

$/_{4pt}$

Enoncer une version du théorème des accroissements finis.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$,

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{array} \right.$ **alors** il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$/_{3pt}$

SJ On note f la fonction définie sur $\left]\,0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$

La tangente à C_f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation : $y = -\dfrac{1}{9}(x-1) + \dfrac{1}{3}$

après simplification : $y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{4}{9}$

$/_{2pt}$

SJ **VRAI - FAUX**
$+1$ pour une réponse correcte et -1 pour une erreur *(Attention : il est parfois préférable de ne pas répondre)*

1) Soit f une fonction dérivable sur $[-1,1]$ et vérifiant : $\forall x \in [-1,1], \quad f'(x) \geqslant 0$

   Affirmation : f est strictement croissante sur $[-1,1]$. Vrai ☐ Faux ■

2) **Affirmation** : $[1,2] \cup [4,6]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ Vrai ☐ Faux ■

3) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = x & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$

   Affirmation : La fonction f est dérivable en 1. Vrai ☐ Faux ■

4) On note f la fonction inverse, $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

   Affirmation : f est strictement décroissante sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}^*$.
   Vrai ■ Faux ☐

$/_{\pm 4pt}$