Feuille_Cours_3 : Espaces vectoriels.

Introduction. Définition. Exemples.
Sous-espaces vectoriel, définition, caractérisation.
Espace engendré. Définition. Théorème. Opérations élémentaires. Familles génératrices.

Ex 1 : *(Dans $\mathbb{R}^3$)*

1) Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

$$F_1 = \left\{(a+b, a, b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \qquad F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+2z = 0 \right\}$$

2) Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+2z = 1 \right\} \qquad F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2+y+2z = 0 \right\}$$

Ex 2 : On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. et on considère : A une matrice quelconque de E.
Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E

$$F_1 = \{M \in E \mid AM = MA \} \qquad F_2 = \{M \in E \mid \exists N \in E, \quad MN = I_2 \}$$
$$F_3 = \left\{M \in E \mid {}^tM = -M \right\} \qquad F_4 = \left\{M \in E \mid M^2 = M \right\}$$

Ex 3 : On note F l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

1) Question préliminaire : Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. *(On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)*
2) $F_1 = \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + x^2 f(x) = 0\}$ est-il un sous-espace de E ?
3) $F_2 = \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2xf(x) = 2\}$ est-il un sous-espace de E ?

Ex 4 : On note $E = \mathbb{R}[X]$,
Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E.

$$F_1 = \mathbb{R}_3[X] \qquad F_2 = \left\{P \in E \mid \deg(P) \in \{1;2\} \right\} \qquad F_3 = \{P \in E \mid XP' = 6P \}$$

Ex 5 : Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$ espace-vectoriel E,

1) *(Question de cours)* Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) Démontrer l'équivalence :

$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Ex 6 : Simplifier les espaces engendrés suivants.

1) $\text{Vect} < (1,2,3), (2,1,4), (-1,4,1) >$
2) $\text{Vect} < (X-1)^2, X^2+1, (X+1)^2, X^2 >$
3) $\text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ en notant : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Ex 7 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $u_1 = (1,2,-1,3)$, $u_2 = (2,4,1,-2)$ et $u_3 = (3,6,3,-7)$.
Montrer que : $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ peut être engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Ex 8 : Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère les suites $u = (1 + (-1)^n)$, $v = \left(4 + (-1)^{n+1}\right)$ et w=(2)
Montrer que : $\text{Vect}(u, v, w)$ peut être engendré par deux suites.

Ex 9 : Montrer que : $f : x \mapsto 3 - 4\cos(2x)$ appartient à $\text{Vect}(u, v)$ où $u : x \mapsto \sin^2(x)$ et $v : x \mapsto \cos^2(x)$.

Ex 10 : On note $f : x \mapsto e^x$, $u : x \mapsto \sin^2(x)$ et $v : x \mapsto \cos^2(x)$.
Montrer que $f \notin \text{Vect}(u, v)$