Feuille 7 : Résolution d'équation. Dichotomie. Méthode de Newton.

L'étude générale des fonction à une variable réelle nécessite souvent la résolution d'équations du type $f(x) = 0$. Autrement dit, nous sommes amenés à trouver les zéros d'une fonction, c'est à dire des valeurs réelles α telles que

$$f(\alpha) = 0.$$

Dans la plupart des cas, il faut résoudre une équation non linéaire dont on n'est pas capable de trouver une solution exacte. On dispose alors de plusieurs méthodes numériques pour approcher la valeur exacte.

I) La méthode de dichotomie *(voir l'exemple 2 de l'oral 2022 de l'agro)*

1) Illustrer graphiquement cette méthode.

2) Ecrire une fonction `dichotomie(f, a, b, eps)` qui utilise l'algorithme de dichotomie pour résoudre une équation $f(x) = 0$
Cette fonction prend en entrée 4 arguments : `f` une fonction numérique, `a`, `b` et `eps` des nombres.
Elle suppose que $a < b$, f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, `eps` > 0 et $f(a)f(b) < 0$.
Elle doit renvoyer une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$

3) *(Pour ceux qui ont déjà fait des fonctions récursives)*
Ecrire une fonction récursive qui utilise l'algorithme de dichotomie pour résoudre une équation $f(x) = 0$.

4) Testez vos fonctions avec $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

II) La méthode de Newton. *(Voir le sujet MMI 2023)*

1) Illustrer graphiquement cette méthode.

2) Ecrire une fonction `newton(f , fprime, u0, eps)` qui utilise l'algorithme de Newton pour résoudre une équation $f(x) = 0$

3) Testez votre fonction avec $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

III) Comparaison des deux méthodes sur l'exemple.

1) Compléter le programme suivant et observer les affichages.

```
def f(x):
    return x**2 - 2

def fprime(x):
    return                              # A compléter

u = 2
for k in range(10):
    u = u -f(u)/fprime(u)
    print(u)

a, b = 0, 2
for k in range(60):
    m = (a+b)/2
    if f(m)*f(b) < 0:
                                       # A compléter
    else :
                                       # A compléter
    print(k, " : ", m)
```

2) Commenter ces affichages.

IV) Applications. *Utiliser une de ces fonctions pour répondre aux questions suivantes.*

1) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-5} de la solution de l'équation $\cos(x) = x$ sur $[0, 3]$.

2) Déterminer une valeur approchée, à 10^{-5} près, de la solution l'équation $x^2 \ln(x) - x^2 = 1$.

3) On considère pour tout entier $n \geqslant 3$ l'équation :

$$(E_n) :\ x^n + x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \text{d'inconnue } x \in [\,0\,,1]$$

Pour chaque entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution que l'on note x_n.

a) Ecrire un programme affichant les 20 premières valeurs de (x_n).

b) Tracer une courbe donnant l'allure de x_n en fonction de n.

c) Faire des conjectures sur le comportement de (x_n).

4) On étudie dans cet exercice, pour tout entier naturel n non nul, les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par l'expression : $f(x) = \ln x + x$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n.

b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes x_n pour n allant de 1 à 10, et les représenter graphiquement.

5) Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \qquad f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

On donne le tableau de variations de f_n :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	0	↘	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	↗	$+\infty$

Ainsi pour chaque n dans $\mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0; +\infty[$.

De plus $f_n(1) \leqslant f_n(\alpha_n) \leqslant f_n(2)$, on en déduit que : $\quad 1 \leqslant \alpha_n \leqslant 2$

a) Ecrire un programme permettant de tracer α_n en fonction de n pour n allant de 2 à 100.

b) Après avoir exécuté le programme : proposer des conjectures sur le comportement de $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$.