Feuille_Cours_3_2 : Familles génératrices. Libres. Bases. Dimension.

Familles génératrices. 3.5 Définition.
Familles libres. 4.1 Définition 4.2 Identification (Démo) 4.3 Polynômes (Démo)
Bases. 5.1 Définition. 5.2 Caractérisation. (Démo)
Coordonnées d'un vecteur dans une base 6.1 Définition. 6.2 Application Coord$_{\mathscr{B}}$ 6.3 Matrices d'une famille de vecteurs.
Dimension d'un sous-espace vectoriel. 7.1 Définition. 7.2 Nombre de vecteurs dans une famille libre.

– –

Ex 1 : 1) Montrer que $((1,2),(1,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $(X^2+1\,,\ X-1\,,\ X^2+X+1\,,\ 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Montrer que $((1,1,-2)\,,\ (0,1,-1)\,,\ (1,-1,0))$ est une famille génératrice de $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

Ex 2 : Etudier la liberté des familles suivantes :
1) Dans $\mathbb{R}^4$, la famille (u_1,u_2,u_3) en notant : $u_1=(1,2,-1,3)$, $u_2=(0,1,0,1)$ et $u_3=(1,1,1,0)$.
2) Dans $\mathbb{C}^4$, la famille (u_1,u_2,u_3) en notant : $u_1=(1,0,1,0)$, $u_2=(1,1,1,2)$ et $u_3=(1,3,1,6)$.
3) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille (f,g) en notant : $f:x\longmapsto\cos(x)$ et $g:x\longmapsto\sin(x)$
4) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille (f_1,f_2,f_3) en notant : $f_1:x\longmapsto\cos(2x)$, $f_2:x\longmapsto 1$ et $f_3:x\longmapsto\cos^2(x)$.
5) Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille (P_1,P_2,P_3) en notant $P_1=X(X+2)$, $P_2=X^3-X^2+2$ et $P_3=X^3+2X+4$

Ex 3 : 1) Etudier la liberté de la famille $(\ X^4+2\ ,\ X(X-1)\ ,\ (X^3-1)^2\ )$.
2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on note pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P_k(X)=(X-2)^k$. Justifier que $(P_0,\dots,P_n)$ est libre.
3) Etudier la liberté de la famille $(\ X^2\ ,\ X(X-1)\ ,\ (X-1)^2\ )$.

Ex 4 : 1) Déterminer tous les triplets (a,b,c) tels que :

$$-(X-1)^2=a(X-1)+b(X-1)^2+c(X-1)^3$$

2) Justifier qu'il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x+2)=a\cos(x)+b\sin(x)$$

3) Déterminer tous les triplets (a,b,c) tels que :

$$(2,2,2)=a(1,1,1)+b(1,0,1)+c(0,1,0)$$

Ex 5 : Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :
1) $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 3x+y+3z+t=0 \\ x+2y=0 \end{cases}\right\}$
2) $F=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f''=f\ \}$
3) $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\ \}$
4) $F=\left\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}M\right\}$

Ex 6 : 1) Déterminer la matrice des coordonnées des vecteurs suivants dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (notée : $\mathscr{B}$)

$$u=(1,2,3)\qquad\qquad v=(0,0,0)$$

2) Déterminer la matrice des coordonnées des vecteurs suivants dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ *(notée $\mathscr{B}=(1,X,X^2,X^3)$).*

$$P(X)=-X^2+3X+4\qquad\qquad R(X)=2(X-2)^3$$

3) On admet que $\mathscr{B} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner la matrice des vecteurs suivants dans la base $\mathscr{B}$:

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (2,1,0) \qquad u_3 = (3,-1,2)$$

4) On admet que $\mathscr{B} = \big(1\,,\, X\,,\, X(X-1)\,,\, X(X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Donner la matrice des coordonnées des polynômes suivants dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_1(X) = X(X-1) \qquad P_2(X) = X-1 \qquad P_3(X) = X^2 \qquad P_4(X) = X^3$$

Ex 7 : 1) Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Justifier que AX est une combinaison des colonnes de A.

2) En déduire $\text{Coord}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{k=1}^{p} x_k u_k\right)$ en fonction de $Mat_{\mathscr{B}}(u_1, ..., u_p)$

Ex 8 : Donner, en le justifiant, la dimension des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels suivants :

$$\mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}_5[X]$$

Ex 9 : 1) Soit $F = \{\ (x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4 \mid x+y=0 \quad \text{et} \quad y+z+t=0\ \}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

2) Soit $F = \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\ \}$,
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa dimension.

Ex 10 : Les familles suivantes sont elles libres :
$\mathscr{F}_1 = \Big((1,2),(1,6),(0,1)\Big)$, $\mathscr{F}_2 = \Big(X^2{+}1, 1{+}2X{+}X^2, X{+}1, X\Big)$ et $\mathscr{F}_3 = \Big((1,2,0),(1,3,1),(2,8,1),(1,0,2)\Big)$