Correction de la feuille_Cours_3 : Espaces vectoriels.

Ex 1 : *(Dans $\mathbb{R}^3$)*

1) *(En classe nous avons fait aussi la démonstration avec la caractérisation)*

$$\begin{array}{rcl} F_1 &=& \left\{(a+b,a,b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\ \right\} \\ &=& \left\{a(1,1,0)+b(1,0,1) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\ \right\} \\ &=& \text{Vect} < (1,1,0),(1,0,1) > \end{array}$$

donc : $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

Rédaction vue en classe sur un autre exemple qui détaille le raisonnement, mais qu'on réduit en pratique.
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} u\in F_2 &\iff& -x+y+2z=0 \\ &\iff& x=y+2z \\ &\iff& \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \left\{\begin{array}{l} x=\alpha+2\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right. \\ &\iff& \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)=\alpha(1,1,0)+\beta(2,0,1) \\ &\iff& (x,y,z)\in \text{Vect} < (1,1,0),(2,0,1) > \end{array}$$

donc $F_2 = \text{Vect} < (1,1,0),(2,0,1) >$ et ainsi $\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$
Rédaction plus efficace :

$$\begin{array}{rcl} F_2 &=& \left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -x+y+2z=0\ \right\} \\ &=& \left\{\ (y+2z,y,z) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\ \right\} \\ &=& \text{Vect} < (1,1,0),(2,0,1) > \end{array}$$

donc : $\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

2) $(0,0,0)\notin F_1$ donc $\boxed{F_1 \text{ n'est pas un espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

$u=(1,-1,2)\in F_2$ et $(-1)u=(-1,1,-2)\notin F_2$ donc $\boxed{F_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

Ex 2 : ❶ *(Caractérisation des sous-espaces vectoriels)*

- $F_1\subset E$
- La matrice nulle 0_n vérifie $0_nA=A0_n$ donc $0_E\in F_1$
- Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ et $(M,N)\in {F_1}^2$,

$$\begin{array}{rcll} A(\alpha M+\beta N) &=& \alpha AM+\beta AN & \\ &=& \alpha MA+\beta NA & \quad\text{car } (M,N)\in {F_1}^2 \\ &=& (\alpha M+\beta N)A & \end{array}$$

donc $\alpha M+\beta N\in F_1$

En conclusion : $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

❷ La matrice nulle n'est pas dans F_2 donc $\boxed{F_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel de } E}$

❸ *(Caractérisation des sous-espaces vectoriels)*

• $F_3 \subset E$

• La matrice nulle 0_n vérifie ${}^t0_n = -0_n$ donc $0_E \in F_3$

• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $(M, N) \in {F_3}^2$,

$$\begin{aligned} {}^t(\alpha M + \beta N) &= \alpha {}^tM + \beta {}^tN \\ &= -\alpha M - \beta N \qquad \text{car } (M,N) \in {F_3}^2 \\ &= -(\alpha M + \beta N) \end{aligned}$$

donc $\alpha M + \beta N \in F_3$

En conclusion : $\boxed{F_3 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

❹ La matrice I_n appartient à E_4, mais $-I_n$ n'appartient pas à E_4 donc

$$\boxed{E_4 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$$

Ex 3 : On note F l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

1) Question préliminaire :

• La fonction nulle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Extrait du cours sur les fonctions dérivables :

• Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

Ce qui justifie que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

Remarque : on a de plus quand f et g sont dérivables, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

2) **Rédaction 1 :**

Le cours sur les équations différentielles permet d'affirmer que $F_1 = \text{Vect} < g >$ avec $g : x \longmapsto e^{-\frac{x^3}{3}}$ donc

$$\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

Rédaction 2 :

• $F_1 \subset E$

• la fonction nulle vérifie la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + x^2 f(x) = 0$ donc $0_E \in F_1$

• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in F_1$,

on note $h = \alpha f + \beta g$, *(On sait que h est dérivable (voir question préliminaire))*

et pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) + x^2 h(x) &= (\alpha f + \beta g)'(x) + x^2(\alpha f + \beta g)(x) \\ &= (\alpha f' + \beta g')(x) + x^2(\alpha f + \beta g)(x) \\ &= \alpha f'(x) + \beta g'(x) + x^2(\alpha f(x) + \beta g(x)) \\ &= \alpha(f'(x) + x^2 f(x)) + \beta(g'(x) + x^2 g(x)) \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \qquad \text{car } (f,g) \in F_1^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $h = \alpha f + \beta g \in F_1$

En conclusion : $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

3) La fonction nulle n'est pas dans F_2 donc $\boxed{F_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel de } E}$

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : 1) • $F \cap G \subset E$

• $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$.

• Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(u, v) \in (F \cap G)^2$,

$F \cap G \subset F$ donc $u \in F$ et $v \in F$ or F est un sous-espace vectoriel donc $\alpha u + \beta v \in F$

$F \cap G \subset G$ donc $u \in G$ et $v \in G$ or G est un sous-espace vectoriel donc $\alpha u + \beta v \in G$

donc $\alpha u + \beta v \in F \cap G$

En conclusion :

$$\boxed{F \cap G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

2) Démontrons l'équivalence :

$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Seule l'implication directe mérite une démonstration.

Montrons-la sous sa forme contraposée :

On suppose qu'il existe un v_1 dans F et pas dans G et un v_2 dans G et pas dans F.

(*Autrement dit : on n'a ni $F \subset G$, ni $G \subset F$*)

v_1 et v_2 sont bien dans $F \cup G$,

mais : $v_1 + v_2$ ne peut être dans F car si il était, on aurait $v_2 = v_1 + v_2 - v_1$ dans F,

et $v_1 + v_2$ ne peut être dans G car si il était, on aurait $v_1 = v_1 + v_2 - v_2$ dans G,

donc $v_1 + v_2 \notin F \cup G$

donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

$$\boxed{\text{Si } F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel alors, } F \subset G \text{ ou } G \subset F}$$

Remarque : la réciproque est immédiate car si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$

En conclusion :

$$\boxed{F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, } F \subset G \text{ ou } G \subset F}$$

La suite n'a pas été corrigée