Feuille_calcul_4 : Systèmes linéaires.

Ex 1 : Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1) $F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & -x \\ -x-2y & = & -y \end{array} \right. \right\}$.

2) $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

3) On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \left\{ X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; MX = X \right\}$

4) $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y+3z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ 3x+y+2z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$

5) $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

6) On note F l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ tels que $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad + 5x_5 & = & 0 \\ x_3 + \ x_4 + \ x_5 & = & 0 \end{array} \right.$

Ex 2 : Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1) $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \right\}$

2) $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^\top = M \right\}$

3) $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^\top = -M \right\}$

4) $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = 0 \}$

5) $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P = (X+1)P' \}$

6) $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X) = P(1-X) \}$

Ex 3 : On note $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

2) Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Ex 4 : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et la famille $\mathscr{B} = (1 - 2X^2 , 3X^2 + X , 2X^2 + X)$.

1) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E .

2) On note : $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = (X+1)^2$ et $P_3 = X^2 + 5X + 1$.
Déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des polynômes : P_1, P_2 et P_3.

Ex 5 : Déterminer suivant les valeurs du complexe a, la dimension des sous-espaces vectoriels F_a suivants.

1) $F_a = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 3 & 2-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2) $F_a = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ex 6 : On considère le système à n inconnues :

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & & & \ddots & & & = & \vdots \\ & & & & & \ddots & & = & \vdots \\ & & & & & x_{n-1} & + \; x_n & = & 1 \\ x_1 & & & & & & + \; x_n & = & 1 \end{array} \right.$$

On note (Σ_0) son système homogène associé.

1) Résoudre (Σ_0) (*on discutera suivant la parité de* n).

2) En déduire l'ensemble des solutions de (Σ).