Colles de mathématiques - Semaine 4 - du 13/10/25

La colle commencera par une ou deux questions de cours.

- **Révision sur les fonctions.**

  Fonctions usuelles. Propriétés, représentations graphiques.
  Définitions : Majorée, bornée, croissante, strictement croissante, ... Définition d'un intervalle.
  Limite d'une fonction. Passage à la limite sur les inégalités larges. Théorèmes de comparaison.
  Croissances comparées des fonctions.
  Théorème de limite monotone.
  Définition d'une fonction continue en x_0. Prolongement par continuité.
  Définition d'une fonction dérivable en x_0. Equation de la tangente.
  Dérivée d'un combinaison linéaire, d'un produit et d'un quotient de fonctions dérivables.
  Dérivée d'une composée de fonctions dérivables. Dérivée de la fonction réciproque d'une bijection dérivable.
  Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection.
  L'image continue d'un segment est un segment.
  Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.
  Dérivée et sens de variations.

- **Développements limités.**

  Définition. Unicité. Partie régulière.
  Lorsque $a \neq 0$, $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} ax^n + o(x^n) \iff f(x) \underset{x\to 0}{\sim} ax^n$
  Formule de Taylor-Young. Développements limités usuels. Primitivation.

- **Révisions : Systèmes linéaires.**

  Résolution de système par la méthode du pivot. Notion d'inconnues principales et d'inconnues secondaires.
  Théorème : Un système triangulaire a une unique solution si, et seulement si, il n'a pas de zéro sur sa diagonale.

- **Espaces vectoriels.**

  Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.
  Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$
  Sous-espace vectoriel. Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
  Définition de $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Propriétés. ***Démonstration*** *de Vect*$(u_1, \ldots, u_n)$ *est un sous-espace vectoriel.*
  Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice.
  Théorème : Toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre. ***(Démo.)***
  Base d'un espace vectoriel. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. *(Nous utilisons les notations* $Coord_B(u)$ *pour un vecteur u et* $Mat_B(u_1, ..., u_n)$ *pour une famille.)*
  Base canonique de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}_n[X]$.

  On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
  Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E. Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$
  Dans un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$:
  - Toute famille libre a au plus n éléments.
  - Une famille libre ayant n éléments est une base.
  - Une famille génératrice ayant n éléments est une base.

- **Python.**

  Algorithme de Dichotomie. Méthode de Newton.

Pour les questions de cours :

On demandera un énoncé (une définition ou un théorème) du cours sur les fonctions (y compris DL).
Puis la même chose sur les espaces vectoriels.
On ne donnera pas de démonstration en question de cours.

Pour les exercices :

- Etude de fonctions.
- Calculs de limites. (y compris avec l'utilisation des DL)
- Utilisation des théorèmes du cours sur les fonctions.
- Exercices d'application du cours sur les espaces vectoriel.
- Présentation d'un des deux algorithmes : Dichotomie ou Newton.