Feuille_Exo_3 Espaces vectoriels.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$
   (a) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) $F$ est-il de dimension finie ?
   On note $F_4 = F \cap \mathbb{R}_4[X]$.
   (c) Justifier $F_4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Montrer que $F_4$ est de dimension finie, déterminer une base $\mathscr{B}$ de $F_4$ puis préciser sa dimension.
   (e) On note $P = (X-1)^4$, justifier que $P \in F_4$ et déterminer ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

2. On note $F = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^\top = M\right\}$
   (a) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base de $F$ et les coordonnées de $I_2$ dans cette base.

3. Soit $E$ un espace vectoriel et $u_1$, $u_2$, $u_3$ trois vecteurs tels que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $E$.
   (a) On note : $e_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $e_2 = u_1 - u_2 + u_3$ et $e_3 = -u_1 + 5u_2 - u_3$.
   La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est-elle une base de $E$ ?
   (b) On note : $e_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $e_2 = u_1 + u_2$ et $e_3 = u_1$.
   La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est-elle une base de $E$ ?

4. (a) Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, on note $f_1 : x \longmapsto e^x$, $f_2 : x \longmapsto xe^x$, $f_3 : x \longmapsto x^2e^x$ et $f_4 : x \longmapsto x^3e^x$.
   Etudier la liberté de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k : x \longmapsto e^{kx}$.
   Montrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k(X) = (X-2)^k$.
   Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.
   Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k : x \longmapsto \sin(kx)$.
   Montrer par récurrence que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. *(On pourra dériver deux fois une combinaison linéaire nulle)*

5. Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, $B_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B_2 = (f_1, \ldots, f_p)$ des familles libres respectives de $E_1$ et $E_2$.
   On suppose que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
   Montrer que la famille $B = (B_1, B_2) = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre de vecteurs de $E$.

6. Soit $F = \left\{ f \in D_2(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0 \right\}$.
   *On rappelle que : $D_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.*
   (a) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $F$.
   (c) Montrer que $f : x \longmapsto 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ appartient à $F$.
   (d) Donner la matrice des coordonnées de $f$ dans la base de $\mathcal{B}$

$\boxed{\text{Définitions et notations}}$ *$n$ désigne un entier non nul et $E$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. **Définition :** une matrice $M \in E$ est dite **nilpotente** lorsqu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$.
2. **Théorème :** On admettra que, si $M \in E$ est nilpotente, alors $M^n = 0$.
3. **Définition :** une matrice $M \in E$ est dite **nilpotente maximale** lorsque $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$.

## I $\boxed{\text{Propriétés liées à une matrice nilpotente maximale}}$

*On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on fixe une matrice $A \in E$. On suppose, de plus, que $A$ est nilpotente maximale et on définit la famille $\mathcal{F} = \left(I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\right)$ et $G =$Vect$< \mathcal{F} >$.*

*On note, enfin, $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

1. Montrer la liberté de la famille $\mathcal{F}$. (*on pourra multiplier une égalité d'abord par $A^{n-1}$*)
2. Justifier que $G$ est un espace vectoriel réel dont on donnera une base et la dimension.
3. Montrer qu'il existe une colonne $X_0 \in \mathcal{E}$ telle que $A^{n-1}X_0 \neq 0_{\mathcal{E}}$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \left(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est une base de $\mathcal{E}$.
5. On fixe d'abord une matrice $M \in E$ telle que $AM = MA$ et on note $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ les coordonnées de $MX_0$ dans la base $\mathcal{B}'$. On définit également la matrice $P = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1}A^{n-1}$.
   (a) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de $MAX_0$, de $MA^2X_0$, ...et de $MA^{n-1}X_0$.
   (b) Montrer que, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $MA^kX_0 = PA^kX_0$.
   (c) En déduire que, $\forall X \in \mathcal{E}$, $MX = PX$.
   (d) Conclure que, nécessairement, $M \in G$.
6. Montrer que, $\forall M \in E, \quad AM = MA \iff M \in G$.

## II $\boxed{\text{Propriétés de l'exponentielle de matrices nilpotentes}}$

**Définition :** étant donnée une matrice $M \in E$ nilpotente, on définit son exponentielle que l'on note $e^M$, par :

$$e^M = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2} M^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} M^{n-1}$$

*On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on fixe deux matrices $A$ et $B$ éléments de $E$.*
*On suppose, de plus, que $A$ et $B$ sont nilpotentes et que $AB = BA$.*

1. Montrer que, $\forall k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $A^kB^{2n-1-k} = 0$.
2. En déduire que $(A+B)$ est également nilpotente.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!(k-p)!} A^pB^{k-p} = e^Ae^B$.
4. En déduire que $e^{(A+B)} = e^Ae^B$.
5. Montrer que la matrice $e^A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de $A$.
6. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left(e^A\right)^k = e^{kA}$.