BCPST2$_A$ *(Lundi 13 octobre 2025)* Nom :
Prénom :

Correction de l'interrogation

SJ On note F l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui admet pour base $\Big((3, -4, 1)\Big)$,

et $\dim(F) = 1$

/3pt

SJ On considére le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ suivant : $\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3} \\ x - y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \left(\dfrac{11}{24} ; \dfrac{5}{24} \right) \right\}$

/2pt

QC Donner la définition d'un famille libre de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Une famille $(u_1, ..., u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite libre lorsque :

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0_E \implies \forall k \in [\![1, p]\!],\ \lambda_k = 0 \right)$$

/2pt

AJ Déterminez deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2; \frac{3}{2}\}, \quad \dfrac{1}{(x-2)(2x-3)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{2x-3}$

Détaillez votre réponse.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; \frac{3}{2}\}$, $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{2x-3} = \dfrac{a(2x-3) + b(x-2)}{(x-2)(2x-3)} = \dfrac{(2a+b)x - (3a+2b)}{(x-2)(2x-3)}$

Pour avoir l'égalité demandée il suffit d'avoir a et b tels que : $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2; \tfrac{3}{2}\}, \quad \dfrac{1}{(x-2)(2x-3)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{2x-3}}$$

/3pt

QC Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie.

Un espace vectoriel E est dit de dimension finie lorsqu'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.

Donner un exemple d'espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie : $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

/3pt

SJ *Compléter* :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

/1pt

QC Donner une caractérisation d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.
Un ensemble F est un sous espace vectoriel de E si, et seulement si,

$$F \subset E, \quad 0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in F^2,\ \alpha u + \beta v \in F$$

/2pt

AJ On note $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, -1)$.
Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Pour } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} a = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc $\mathscr{B}$ est donc libre.
Comme de plus $\mathscr{B}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ on a bien $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

Déterminer la matrice des cooordonnées de $v = (1, 2, 3)$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$v = au_1 + bu_2 + cu_3 \iff \begin{cases} a = 1 \\ a + b + c = 2 \\ a + b - c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 1 \\ b - c = 2 \end{cases}$$

$$\text{donc } \boxed{\operatorname{coord}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

/3pt

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ admet une unique solution **si, et seulement si,** $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

En effet :

Un système **triangulaire** a une et une seule solution si, et seulement s'il n'a pas de zéro sur la diagonale.

/3pt

AJ **VRAI - FAUX**

1) **Affirmation** :

Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, le système $\begin{cases} ax + y & = & 1 \\ x - ay & = & 3 \end{cases}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Vrai ■ Faux □

Justification : Le déterminant est toujours non nul.

2) **Affirmation** :

$(1, 0, -1)$ est une solution du système $\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ 2x + 3y + 2z & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{cases}$

Vrai ■ Faux □

Justification : il suffit de constater que $(1, 0, -1)$ vérifie chaque équation.

3) **Affirmation** :

Quel que soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ le système $\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ ax + by + cz & = & d \end{cases}$ a une infinité de solution.

Vrai □ Faux ■

Justification : En prenant $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 2)$ le système n'a pas de solution.

/4pt