Feuille 8 : Polynômes et Python.

Les polynomes sont représentés simplement par des listes de nombres.

Par exemple :

- $3X^2 + 2X - 5$ est représenté par `[-5, 2, 3]` mais aussi par `[-5, 2, 3, 0, 0]` ou ...
- Le polynôme nul est représenté par `[0]` mais aussi par `[]` ou `[0, 0]` ...

La donnée de cette liste définie entièrement le polynôme associé.

1. Ecrire une fonction Python `deg(P)` qui prend pour argument une liste `P` représentant un polynôme et qui renvoie son degré.
2. Ecrire une fonction Python `P_de_z(P, z)` qui prend pour argument une liste `P` représentant un polynôme et un nombre `z` qui renvoie la valeur de $P(z)$.
3. Ecrire une fonction Python `somme(P, Q)` qui prend pour arguments deux listes représentant deux polynômes P et Q et qui renvoie une liste représentant le polynôme $P + Q$.
4. Ecrire une fonction Python `produit(P, Q)` qui prend pour arguments deux listes représentant deux polynômes P et Q et qui renvoie une liste représentant le polynôme $P \times Q$.
5. Ecrire une fonction Python `puissance(P, n)` qui prend pour arguments une liste représentant un polynômes P et un entier n qui renvoie une liste représentant le polynôme P^n.
6. Ecrire une fonction Python `derive(P)` qui prend pour arguments une liste représentant un polynômes P qui renvoie une liste représentant le polynôme P'.

7. **Division euclidienne de polynômes.**

On admet le théorème suivant.

> Étant donnés deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
>
> $$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B)$$
>
> Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Présentation des calculs permettant de trouver Q et R.

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +X^2 & & -1 & X-1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2 \; +2X \; +2 \\ \cline{1-2}
 & 2X^2 & & & \\
 & -2X^2 & +2X & & \\ \cline{2-3}
 & & 2X & & \\
 & & -2X & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}$$

Ce qui donne :

$$X^3 + X^2 - 1 \; = \; (X - 1)\,(X^2 + 2X + 2) \; + \; 1$$

Pour trouver Q et R on utilise l'algorithme suivant :

> **Données** : A un polynôme de degré n, B un polynôme de degré m.
>
> **Variables** : Le compteur de boucle k et les polynômes Q et R
>
> • $Q \leftarrow 0$; $R \leftarrow A$
> • Pour k allant de $n - m$ jusqu'à 0 :
> $\quad q_k \leftarrow r_{k+m}/b_m$
> $\quad R \leftarrow R - q_k X^k B$
>
> **Résultat** : (Q, R)

Ecrire une fonction `division(A, B)` ayant pour paramètres deux polynômes `A` et `B`, et qui renvoie le couple de polynômes (Q, R), respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.