Fiche de révision — Matrices

Notation et vocabulaire

- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.
- Cas particuliers : Matrice nulle, matrices colonnes, matrices carrée, matrices diagonales, triangulaires. Matrice identité.
- Diagonale d'une matrice carrée.

Opérations

- $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
  On retrouve toutes les propriétés communes à tous les espaces vectoriels.
- **Définition du produit.**
  Pour A un matrice $p \times q$ et B une matrice $q \times r$, AB est la matrice $p \times r$ définie par :
  $$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} (A)_{i,k} \times (B)_{k,j}$$
- Le produit n'est ni commutative, ni intègre.
- Puissance d'une matrice carrée.
  $A^0 = I_n$ et $A^{k+1} = A \times A^k = A^k \times A$
- Formule du binôme et de Bernoulli pour des matrices carrées.
  Si $AB = BA$ alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
  Si $AB = BA$ alors $A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$

Matrices inversibles

Définition.
Une matrice carrée A est dite inversible lorsqu'il existe B telle que $AB = BA = I_n$.
Cette matrice est unique est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Inverse d'un produit.
Si M et N sont inversibles alors MN aussi et $(MN)^{-1}$

Inversibilité.

- **Systèmes linéaires.**
  A est inversible si, et seulement si, $AX = 0$ est de Cramer.
  si A est inversible alors $\forall Y$, $AX = Y$ est de Cramer.
  si $\forall Y$, $AX = Y$ est de Cramer alors A est inversible
- **Matrices triangulaires.**
  Th : Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, elle n'a pas de zéro sur sa diagonale.
- **Matrices diagonales.**
  $A = \text{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$
  A est inversible, ssi , $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$
  et alors $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$
- **Matrices** 2×2**.** Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,
  A est inversible **si, et seulement si,** $ad - bc \neq 0$.
  et sous cette condition :
  $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- **Calcul de l'inverse.**
  Si on parvient à résoudre à montrer que $AX = Y$ a pour unique solution X qu'on peut exprimer $X = MY$ alors A est inversible et $A^{-1} = M$
  C'est ce que fait la méthode
  $$(A|I_n) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (I_n|M)$$
  Cette présentation est souvent appelée Méthode de Gauss-Jordan ou des miroirs

Matrice transposée

- **Définition**.
  Pour A une matrice $n \times p$, la matrice A^T est la matrice $p \times n$ définie par : $(A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$
- **Propriétés.**
  ① $\left(A^\top\right)^\top = A$ ② $(kA)^\top = k\,A^\top$
  ③ $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ ④ $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- **Inverse et transposée**.
  A est inversible **ssi** $A^\top$ est inversible
  et alors $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$
- **Matrices symétriques**
  une matrice carrée A est dite symétrique lorsque
  $$A^T = A$$
- **Matrices antisymétriques**.
  une matrice carrée A est dite antisymétrique lorsque
  $$A^T = -A$$

Rang

- **Définition**.
  Le rang d'une matrice A est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes.
- **Théorème** : $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$
- **Théorème** : Pour A une matrice carrée d'ordre n ,
  A est inversible si, et seulement si, $\text{rg}(A) = n$