Correction de la feuille_Exo_3 Espaces vectoriels.

1. *(non corrigé)*
2. *(non corrigé)*
3. *(non corrigé)*
4. (a) Soit $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0$,

   on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a_1 e^x + a_2 x e^x + a_3 x^2 e^x + a_4 x^3 e^x = 0$

   ou encore car $e^x \neq 0$ que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = 0$

   le polynôme $x \longmapsto a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ est nul donc $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0)$.

   $$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ est libre.}}$$

   (b) Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$,

   on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{kx} = 0$,

   autrement dit en notant $P(X)$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\big(e^x\big) = 0$

   Sachant que $\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+^*$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $P\big(t\big) = 0$

   donc $P(X)$ a une infinité de racines, donc $P(X)$ est nul, donc tous ses coefficients sont nuls,

   donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = 0$ et ainsi :

   $$\boxed{\text{La famille } (f_0, \ldots, f_n) \text{ est libre.}}$$

   (c) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$, donc $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls de degré 2 à 2 distincts et ainsi

   $$\boxed{(P_0, \ldots, P_n) \text{ est libre}}$$

   (d) *(non corrigé)*

   (e) *(non corrigé)*

5. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{p} \mu_k f_k = 0_E$

   on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = -\sum_{k=1}^{p} \mu_k f_k$,

   or E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in E_1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mu_k f_k \in E_2$

   on en déduit que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in E_1 \cap E_2$

   or on a supposé que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$

   et comme $(e_1, ..., e_n)$ est libre il vient $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0)$

   on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mu_k f_k = 0_E$ et comme $(f_1, ..., f_p)$ est libre, il vient $(\mu_1, ..., \mu_p) = (0, ..., 0)$

   En résumé on a montré :

$$\text{si} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{p} \mu_k f_k = 0_E \quad \text{alors} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_p) = (0,\ \ldots\ ,0)$$

donc $\boxed{B \text{ est une famille libre}}$