

Correction de la feuille_calcul_4 : Systèmes linéaires.

Ex 1 : 1) Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 u \in F &\iff \begin{cases} x + 2y = -x \\ -x - 2y = -y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \\
 &\iff x = -y \quad (1 \text{ inc. principales et 1 inc. secondaires})
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F &= \{(-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y(-1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} < (-1, 1) >$ et $((-1, 1))$ est libre.

 F est un sous-espace vectoriel et $((-1, 1))$ est une base de F .

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
 u \in F &\iff \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ inc. principales et 2 inc. secondaires}) \\
 &\iff x = -y - z
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F &= \{(-y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
 &= \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}
 \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} < (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$ et $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est libre.

 F est un sous-espace vectoriel et $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de F .

3) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 X \in F &\iff MX = X \\
 &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = x_3 \\ x_4 + x_5 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad (4 \text{ inc. principales et 1 inc. secondaires})
 \end{aligned}$$

donc

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = F = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc $F = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

F est un sous-espace vectoriel et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F .

4) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u \in F &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{cases} \quad (2 \text{ inc. principales et } 1 \text{ inc. secondaires}) \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{5}{4}z \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \left(-\frac{1}{4}z, -\frac{5}{4}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, 1 \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} < (1, 5, -4) >$ et $((1, 5, -4))$ est libre.

F est un sous-espace vectoriel et $((1, 5, -4))$ est une base de F .

5) (non corrigé)

6) Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$,

$$\begin{aligned} u \in F &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -5x_3 - 8x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -5x_3 - 8x_4 - 5x_5 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ inc. principales et } 2 \text{ inc. secondaires}) \\ &\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F &= \{ (-2x_2 - 2x_5, x_2, -x_5, 0, x_5) \mid (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \{ x_2(-2, 1, 0, 0, 0) + x_5(-2, 0, -1, 0, 1) \mid (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2 \} \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} < (-2, 1, 0, 0, 0), (2, 0, -1, 0, 1) >$ et $((-2, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -1, 0, 1))$ est libre.

F est un sous-espace vectoriel et $((-2, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -1, 0, 1))$ est une base de F .

Ex 2 : 1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 M \in F &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a &= a+c \\ a+b &= b+d \\ c &= c \\ c+d &= d \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a &= d \\ c &= 0 \end{cases} \\
 &\iff M = \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (\text{on écrit le vecteur en fonction des inconnues secondaires})
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

F est un sous-espace vectoriel et $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F .

2) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 A \in F &\iff A^\top = A \\
 &\iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a_{2,1} &= a_{1,2} \\ a_{3,1} &= a_{1,3} \\ a_{3,2} &= a_{2,3} \end{cases} \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad (\text{on écrit le vecteur en fonction des inconnues secondaires})
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & m_6 \end{pmatrix} \mid (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\
 &= \{ m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + m_4 A_4 + m_5 A_5 + m_6 A_6 \mid (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6) \in \mathbb{R}^6 \}
 \end{aligned}$$

en notant :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $F = \text{Vect} < A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 >$ et $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ est libre.

F est un sous-espace vectoriel et $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ est une base de F .

3) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, on a alors $P' = b + 2cX + 3dX^2$,

$$\begin{aligned}
 P \in F &\iff P'(1) = 0 \\
 &\iff b + 2c + 3d = 0 \\
 &\iff b = -2c - 3d \\
 &\iff P = a + (-2c - 3d)X + cX^2 + dX^3 \\
 &\hspace{15em} \text{(on écrit le vecteur en fonction des inconnues secondaires)} \\
 &\iff P = a + c(-2X + X^2) + d(-3X + X^3)
 \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} \langle 1, -2X + X^2, -3X + X^3 \rangle$ et $(1, -2X + X^2, -3X + X^3)$ est libre

F est un sous-espace vectoriel et $(1, -2X + X^2, -3X + X^3)$ est une base de F .

4) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, on a alors $P' = b + 2cX + 3dX^2$,

$$\begin{aligned}
 P \in F &\iff P = (X + 1)P' \\
 &\iff a + bX + cX^2 + dX^3 = (1 + X)(b + 2cX + 3dX^2) \\
 &\iff a + bX + cX^2 + dX^3 = b + 2cX + 3dX^2 + bX + 2cX^2 + 3dX^3 \\
 &\iff a + bX + cX^2 + dX^3 = b + (b + 2c)X + (2c + 3d)X^2 + 3dX^3 \\
 &\iff \begin{cases} a = b \\ b = b + 2c \\ c = 2c + 3d \\ d = 3d \end{cases} \quad \text{(Identification)} \\
 &\iff \begin{cases} a = b \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
 &\iff P = b + bX \quad \text{(on écrit le vecteur en fonction des inconnues secondaires)}
 \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} \langle 1 + X \rangle$ et $(1 + X)$ est libre

F est un sous-espace vectoriel et $(1 + X)$ est une base de F .

5) Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned}
 P \in F &\iff P(X) = P(1 - X) \\
 &\iff a + bX + cX^2 = a + b(1 - X) + c(1 - X)^2 \\
 &\iff P(X) = P(1 - X) \\
 &\iff a + bX + cX^2 = a + b + c + (-b - 2c)X + cX^2 \\
 &\iff \begin{cases} a = a + b + c \\ b = -b - 2c \\ c = c \end{cases} \quad \text{(Identification)} \\
 &\iff \begin{cases} b = -c \end{cases} \\
 &\iff P = a - cX + cX^2 \\
 &\hspace{15em} \text{(on écrit le vecteur en fonction des inconnues secondaires)}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F &= \{a - cX + cX^2 \mid (a, c) \in \mathbb{R}^2\} \\
 &= \{a + c(X^2 - X) \mid (a, c) \in \mathbb{R}^2\}
 \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect} \langle 1, X^2 - X \rangle$ et $(1, X^2 - X)$ est libre

F est un sous-espace vectoriel et $(1, X^2 - X)$ est une base de F .