Correction de la feuille Cours_3_2 : Familles génératrices. Libres. Bases. Dimension.

Ex 1 : 1)

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Vect}((1,2),(1,1)) & = & \mathrm{Vect}((1,2),(0,-1)) & (u_2-u_1\to u_2)\\ & = & \mathrm{Vect}((1,2),(0,1)) & (-u_2\to u_2)\\ & = & \mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) & (u_1-2u_2\to u_1)\\ & = & \mathbb{R}^2 & \end{array}$$

$$\boxed{((1,2),(1,1)) \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}^2}$$

2) *(Devinez les opérations élémentaires)*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vect} < X^2+1\,,\, X-1\,,\, X^2+X+1\,,\, 1 > & = & \mathrm{Vect} < X^2\,,\, X\,,\, X^2+X\,,\, 1 >\\ & = & \mathrm{Vect} < X^2\,,\, X\,,\, 0\,,\, 1 >\\ & = & \mathrm{Vect} < X^2\,,\, X\,,\, 1 >\\ & = & \mathbb{R}_2[X] \end{array}$$

$$\boxed{\left(X^2+1\,,\, X-1\,,\, X^2+X+1\,,\, 1\right) \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}_2[X]}$$

3) *(non corrigé)*

Ex 2 : 1) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_E & \iff & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases} & \\ & \iff & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_2-\lambda_3=0\\ 2\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases} & \begin{array}{l} \\ L_2-2L_1\to L_2\\ L_3+L_1\to L_3\\ \\ \end{array}\\ & \iff & \begin{cases} \lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0 \end{cases} & \begin{array}{l}\text{Les trois premières lignes du système précédent}\\ \text{est triangulaire sans zéro sur la diagonale}\end{array} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est une famille libre.}}$$

2) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{C}^3$,

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=(0,0,0,0) & \iff & \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_2+6\lambda_3=0 \end{cases} & \\ & \iff & \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2+3\lambda_3=0\\ 0=0\\ 0=0 \end{cases} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3-L_1\to L_3\\ L_4-2L_2\to L_4 \end{array} \end{array}$$

Ce dernier système a d'autres solutions que $(0,0,0)$ (par exemple $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(2,-3,1)$)

($2u_1-3u_2+u_3=(0,0,0,0)$)

donc :

$$\boxed{\text{La famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est une famille liée.}}$$

3) *(Contrairement aux questions sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}[X]$ on ne raisonne pas par équivalence)*
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $af+bg=0$,

on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + b\sin(x) = 0$,
en prenant deux valeurs particulières pour x : 0 et $\frac{\pi}{2}$ (par exemple) on en déduit que

$$(a, b) = (0, 0)$$

et ainsi :

$$\boxed{\text{La famille } (f, g) \text{ est libre}}$$

4) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ autrement dit : $f_1 = 2f_3 - f_2$

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est liée}}$$

5) *(Comme sur $\mathbb{R}^n$ ici on raisonne par équivalence)*
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 &\iff \lambda_1(X^2 + 2X) + \lambda_2(X^3 - X^2 + 2) + \lambda_3(X^3 + 2X + 4) = 0 \\
&\iff (\lambda_2 + \lambda_3)X^3 + (\lambda_1 - \lambda_2)X^2 + (2\lambda_1 + 2\lambda_3)X + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &=& 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& 0 \\ \lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_3 &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } (P_1, P_2, P_3) \text{ est libre}}$$

Ex 3 : 1) En notant $(P_1, P_2, P_3) = (\ X^4 + 2\ ,\ X(X-1)\ ,\ (X^3 - 1)^2\ )$, on a : $\deg(P_1) = 4$, $\deg(P_2) = 2$ et $\deg(P_3) = 6$.
(P_1, P_2, P_3) est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts 2 à 2 donc

$$\boxed{\text{la famille } (\ X^4 + 2\ ,\ X(X-1)\ ,\ (X^3 - 1)^2\ ) \text{ est libre}}$$

2) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.
$(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts 2 à 2 donc

$$\boxed{\text{la famille } (P_0, \dots, P_n) \text{ est libre}}$$

3) *(Attention ici on ne peut pas utiliser le théorème).*
Remarque : ici je reviens sur la règle : "pour des polynômes je raisonne par équivalence".
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$

on a donc $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 (X-1)^2 = 0$

En évaluant en 0 et en 1 on obtient $\underline{\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 0}$

on a alors $\quad \lambda_2 X(X-1) = 0 \quad$ et en évaluant en 2, on obtient $\underline{\lambda_2 = 0}$

On peut conclure :

$$\boxed{\text{la famille } (\ X^2\ ,\ X(X-1)\ ,\ (X-1)^2\ ) \text{ est libre}}$$

Ex 4 : 1) $((X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ est libre, car c'est une famille de polynôme non nuls et de degré 2 à 2 distincts.
donc *(identification sur une famille libre)*

$$\boxed{-(X-1)^2 = a(X-1) + b(X-1)^2 + c(X-1)^3 \iff a = 0 \qquad b = -1 \qquad c = 0}$$

2) On sait que $\cos(x+2) = \cos(2)\cos(x) - \sin(2)\sin(x)$ et que $(\cos, \sin)$ est une famille libre, donc
vu dans une question précédente.

$$\boxed{\text{il existe un unique couple } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2) = a\cos(x) + b\sin(x)}$$

3) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$(2,2,2)=a(1,1,1)+b(1,0,1)+c(0,1,0) \iff \begin{cases} a+b=2\\ a+c=2\\ a+b=2\end{cases} \iff \begin{cases} b=2-a\\ c=2-a\end{cases}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble recherché est } \Big\{\ (a,2-a,2-a)\mid a\in\mathbb{R}\ \Big\}}$$

Ex 5 : 1) • Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in F &\iff \begin{cases} 3x+y+3z+t=0\\ x+2y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} t+3x+y+3z=0\\ \quad x+2y=0\end{cases} \qquad \textit{(Système échelonné. Inc. principales : t et x)}\\ &\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} x=-2a\\ y=a\\ z=b\\ t=5a-3b\end{cases}\\ &\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 :\ (x,y,z,t)=a(-2,1,0,5)+b(0,0,1,-3)\end{aligned}$$

donc $F=\text{Vect}<u,v>$ en notant : $u=(-2,1,0,5)$ et $v=(0,0,1,-3)$

Autrement dit : (u,v) est une famille génératrice de F.

• De plus $au+bv=(0,0,0,0)\Rightarrow a=b=0$ donc (u,v) est libre,

En conclusion :

$$\boxed{\Big((-2,1,0,5)\,,\,(0,0,1,-3)\Big) \text{ est une base de } F}$$

2) Le cours sur les équations différentielles donne $F=\text{Vect}<f,g>$ où $f:x\longmapsto e^{-x}$ et $g:x\longmapsto e^{x}$

(f,g) est génératrice de F.

Montrons que (f,g) est libre :

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ tel que $\alpha f+\beta g=0$

on a donc $\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha e^{-x}+\beta e^{x}=0$.

en prenant $x=0$ et $x=1$ on en déduit le système : $\begin{cases} \alpha+\beta &= 0\\ e^{-1}\alpha+e\beta &= 0\end{cases}$

or le déterminant de ce système est : $1\times e-1\times e^{-1}\neq 0$ donc il a une unique solution $(\alpha,\beta)=(0,0)$

(f,g) est libre

En conclusion :

$$\boxed{(f,g) \text{ est une base de } F}$$

3) *(non corrigé)*

4) *(non corrigé)*

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : *(Voir le cours sur les espaces vectoriels)*

La suite n'est pas corrigée.