

Correction du problème de la feuille_Exo_3

I) Autour de l'exponentielle et des matrices nilpotentes

1. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k = 0_E$,

en multipliant par A^{n-1} il vient $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^{k+n-1} = 0$

or A est nilpotente donc $A^n = 0$ et ainsi $\lambda_0 A^{n-1} = 0$,

on a aussi supposé que $A^{n-1} \neq 0$ ce qui entraine $\lambda_0 = 0$,

on a alors $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k A^k = 0$,

en multipliant par A^{n-2} il vient $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k A^{k+n-2} = 0$ ce qui entraine $\lambda_1 A^{n-1} = 0$, puis $\lambda_1 = 0$,

on montre ainsi de suite que $\lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{n-1} = 0$

En conclusion : la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Rédaction de la récurrence finie.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i = 0$,

Montrons par récurrence finie sur k que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \lambda_i = 0$

• Pour $k = 0$,

en multipliant par A^{n-1} chaque membre de l'égalité $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i = 0$, il vient $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^{i+n-1} = 0$

or A est nilpotente donc $A^n = 0$ et ainsi $\lambda_0 A^{n-1} = 0$, et comme $A^{n-1} \neq 0$ il vient $\lambda_0 = 0$,

• Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \lambda_i = 0$,

on a alors $\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i A^i = 0$,

en multipliant par A^{n-k-2} chaque membre de cette égalité, il vient $\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i A^{i+n-k-2} = 0$

or A est nilpotente donc $A^n = 0$ et ainsi $\lambda_{k+1} A^{n-1} = 0$, et comme $A^{n-1} \neq 0$ il vient $\lambda_{k+1} = 0$,

En conclusion de cette récurrence on peut affirmer que $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$ et ainsi :

la famille $\mathcal{F}$ est libre.

2. $G = \text{Vect}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de base $\mathcal{F}$,
comme de plus $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs,

G est un espace vectoriel réel de base $\mathcal{F}$ et de dimension n

3. $A^{n-1} \neq 0$ donc elle possède au moins une colonne non nulle, notons j le numéro d'une de ces colonnes.

En posant $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{ième}} \text{ ligne},$ en faisant le produit $A^{n-1}X_0$ on obtient la $j^{\text{ième}}$ colonne de A

et comme cette $j^{\text{ième}}$ colonne est non nulle on a bien montré

il existe une colonne $X_0 \in \mathcal{E}$ telle que $A^{n-1}X_0 \neq 0$.

4. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k X_0 = 0$,

en multipliant à gauche par A^{n-1} il vient $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^{k+n-1} X_0 = 0$

or A est nilpotente donc $A^n = 0$ et ainsi $\lambda_0 A^{n-1} X_0 = 0$,

on a aussi supposé que $A^{n-1}X_0 \neq 0$ ce qui entraîne $\underline{\lambda_0 = 0}$,

on a alors $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k A^k = 0$,

en multipliant par A^{n-2} il vient $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k A^{k+n-2} X_0 = 0$ ce qui entraîne $\lambda_1 A^{n-1} X_0 = 0$, puis $\underline{\lambda_1 = 0}$,

on montre ainsi de suite que $\lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{n-1} = 0$

En conclusion : la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

On sait que :

- $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension n ,
- $\mathcal{B}'$ est libre,
- $\mathcal{B}'$ est formée de n vecteurs de $\mathcal{E}$.

donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{E}$

5. Recherche de l'ensemble des matrices $M \in E$ telles que $AM = MA$.

(a) $\text{Coord}_{\mathcal{B}'}(MX_0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ donc $MX_0 = \alpha_0 X_0 + \alpha_1 A X_0 + \alpha_2 A^2 X_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} X_0$

en multipliant à gauche par A on obtient $AMX_0 = \alpha_0 A X_0 + \alpha_1 A^2 X_0 + \alpha_2 A^3 X_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^n X_0$

comme $A^n = 0$ et $AM = MA$ il vient : $MAX_0 = 0 X_0 + \alpha_0 A X_0 + \alpha_1 A^2 X_0 + \alpha_2 A^3 X_0 + \dots + \alpha_{n-2} A^{n-1} X_0$

ou encore $\text{Coord}_{\mathcal{B}'}(MAX_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \end{pmatrix},$

on montre de même que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\text{Coord}_{\mathcal{B}'}(MA^k X_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1-k} \end{pmatrix}$

(b) $P = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$

donc $PA^k X_0 = \alpha_0 A^k X_0 + \alpha_1 A^{k+1} X_0 + \alpha_2 A^{k+2} X_0 + \cdots + \alpha_{n-1-k} A^{n-1} X_0 + 0$

or la question précédente donne $MA^k X_0 = \alpha_0 A^k X_0 + \alpha_1 A^{k+1} X_0 + \alpha_2 A^{k+2} X_0 + \cdots + \alpha_{n-1-k} A^{n-1} X_0$

on a bien : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad MA^k X_0 = PA^k X_0$

(c) Soit $X \in \mathcal{E}$, on note $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$,

$$\begin{aligned} MX &= M \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k A^k X_0 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k MA^k X_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k PA^k X_0 && \text{d'après la question 5.b.} \\ &= P \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k A^k X_0 \right) \\ &= PX \end{aligned}$$

$\forall X \in \mathcal{E}, \quad MX = PX$

(d) Le résultat précédent permet d'affirmer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (M - P)X = 0$ et que donc $M - P = 0$ ou encore $M = P$.

or $P = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$ appartient à G , donc

$M \in G.$

6. Dans la question 5), on montre que : $AM = MA \implies M \in G$

Réciproquement si $M \in G$ alors $M = Q(A)$ avec Q un polynôme et en utilisant le théorème (6)) donné en introduction on peut en déduire que $AM = MA$

En conclusion,

$\forall M \in E, \quad AM = MA \iff M \in G$

II) Propriétés de l'exponentielle de matrices nilpotentes

1. Distinguons deux cas :

- si $k < n$ alors $2n - 1 - k \geq n$ et comme B est nilpotente on a $B^{2n-1-k} = 0$ et ainsi $A^k B^{2n-1-k} = 0$.
- si $k \geq n$ alors comme A est nilpotente on a $A^n = 0$ et ainsi $A^k B^{2n-1-k} = 0$.

En conclusion, $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, \quad A^k B^{2n-1-k} = 0}$

2. Au lieu de 3) je réponds directement à 4)

$$\begin{aligned} (A + B)^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} A^k B^{2n-1-k} \quad \text{car } AB = BA \\ &= 0 \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{la matrice } (A + B) \text{ est nilpotente}}$

3. (Questions 3) et 4) bizarrement posées)

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A + B)^k \quad \text{car } AB = BA \\ &= e^{(A+B)} \quad \text{car } A + B \text{ est nilpotente} \end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{e^{(A+B)} = e^A e^B}$$

4. (Ici je réponds à 4) en admettant 3))

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!(k-p)!} A^p B^{k-p} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} A^p B^{k-p} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (A + B)^k \quad \text{car } AB = BA \\ &= e^{(A+B)} \quad \text{car } A + B \text{ est nilpotente} \end{aligned}$$

5. A est nilpotente donc $-A$ est nilpotente et les matrices A et $-A$ commutent.

De plus pour deux matrices nilpotentes qui commutent on a : $e^{(A+B)} = e^A e^B$ donc $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^0$

Or l'exponentielle de la matrice nulle est égale à I_n donc

$$\boxed{e^A \text{ est inversible et son inverse est égale à } e^{-A}.}$$

6. Montrons par récurrence sur k que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (e^A)^k = e^{kA}$.

• pour $k = 0$,

$$\text{d'une part } (e^A)^0 = I_n \quad \text{et d'autre part } e^{0 \cdot A} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} 0^i A^i = I_n$$

$$\text{on a bien } \boxed{(e^A)^0 = e^{0 \cdot A}}$$

• Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(e^A)^k = e^{kA}$,

$$\begin{aligned} (e^A)^{k+1} &= (e^A)^k \times e^A \\ &= e^{kA} \times e^A && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= e^{kA+A} && \text{d'après le résultat de la question 4)} \\ &= e^{(k+1)A} \end{aligned}$$

on a bien montré que : si $(e^A)^k = e^{kA}$ alors $(e^A)^{k+1} = e^{(k+1)A}$

$$\text{En conclusion : } \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad (e^A)^k = e^{kA}}$$