

I) Effectuer les produits suivants :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 10 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 27 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -5 & 33 \end{pmatrix}$$

II) Cocher les cases : (*c'est un exercice de rapidité à remplir sans aucun brouillon, sans aucun calcul*)
N'hésitez pas à répondre "je ne sais pas".

$$1. M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐

$$2. M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐

$$3. M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐

$$4. M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐

$$5. M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐

$$6. M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐

$$7. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☒	Non ☐	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐

$$8. \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M est carrée	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est diagonale	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire supérieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est triangulaire inférieure	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐
M est anti-symétrique	Oui ☐	Non ☒	je ne sais pas ☐

III) Justifier si les matrices suivantes sont inversibles, et justifier votre réponse.

Toute allusion au rang de la matrice devra être justifiée.

$$1. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☐ \quad \text{Non } ☒ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : $\text{rg}(M) < 3$ car $L_2 = -L_3$

$$2. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☐ \quad \text{Non } ☒ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : $\text{rg}(M) < 3$ car $C_3 = C_1 + C_2$

$$3. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☐ \quad \text{Non } ☒ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : $\text{rg}(M) < 3$ car $C_1 = C_2$

$$4. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☐ \quad \text{Non } ☒ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : M est triangulaire avec un zéro sur la diagonale. (*Attention : M n'est pas échelonnée!!*)

$$5. \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☒ \quad \text{Non } ☐ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : $\det(M) = -4 \neq 0$

$$6. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☒ \quad \text{Non } ☐ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : En inversant C_1 et C_3 on obtient une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale.

$$7. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☒ \quad \text{Non } ☐ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : M est diagonale sans zéro sur la diagonale.

$$8. \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M \text{ est inversible} \quad \text{Oui } ☒ \quad \text{Non } ☐ \quad \text{je ne sais pas } ☐$$

En effet : $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $\text{rg}(M) = 4$ car les 4 colonnes sont une permutation de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$