Feuille Exo_4 : Matrices inversibles. Rang.

Ex 1. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 & 0 \\ 14 & 18 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 13 & 13 \\ 3 & 3 & 12 & 15 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 12 & 15 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 & 0 \\ 14 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Ex 2. Soient $e_1, e_2, e_3, a, b, c, d \in \mathbb{R}^7$, on note $M = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

Montrer que M est inversible si, et seulement si, $e_1 \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Ex 3. Soient A, B, C, D, E, F, G et H des réels et on note $M = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F \\ 0 & 0 & G & H \end{pmatrix}$.

Montrer que :

$$M \text{ est inversible si, et seulement si, } (AD - BC)(EH - FG) \neq 0$$

Ex 4. 1) Soient n un entier naturel non nul et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que : si $u_n \notin \text{vect}\,(u_1, \ldots, u_{n-1})$ alors $\text{rg}\,(u_1, \ldots, u_n) = \text{rg}\,(u_1, \ldots, u_{n-1}) + 1$.

2) Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) + 1$.

Ex 5. Soient a et λ deux réels, on note M la matrice $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & a-2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

❶ Déterminer le rang de M suivant les différentes valeurs de (a, λ).

❷ Pour quelles valeurs de (a, λ) la matrice M est inversible.

Ex 6. Déterminer le rang de A en fonction des scalaires $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix}$$

Ex 7. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille de vecteurs formée de :

$$P_1 = (X-1)^2 \quad ; \quad P_2 = (X+1)^2 \quad ; \quad P_3 = (X-1)^3 \quad ; \quad P_4 = (X+1)^3$$

1) Déterminer la matrice de (P_1, P_2, P_3, P_4) dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
2) En déduire le rang de (P_1, P_2, P_3, P_4).
3) (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Ex 8. On considére les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = e^x \ , \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

Remarque : f_3 est la fonction cosinus hyperbolique et f_4 est la fonction sinus hyperbolique.

Ex 9. Discuter en fonction des paramètres complexes m et a le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & m \\ a & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a-m & a-1 \\ a+1 & a-2-m \end{pmatrix}$$

Ex 10. Soit A la matrice appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminer, suivant les valeurs du complexe λ le rang de la matrice $A - \lambda I_3$.

Ex 11. $(*)$

1) Soit X une matrice colonne, déterminer le rang de la matrice XX^T.
2) Montrer que si le produit AB existe alors $\text{rg}(AB)$ est inférieur à $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$.
3) Montrer que pour tout matrice A, $\quad \text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A)$.