Colles de mathématiques - Semaine 5 - du 03/11/25

La colle commencera par une ou deux questions de cours.

- **Révisions : Systèmes linéaires.**

  Résolution de système par la méthode du pivot. Notion d'inconnues principales et d'inconnues secondaires.
  Théorème : Un système triangulaire a une unique solution si, et seulement si, il n'a pas de zéro sur sa diagonale.

- **Révisions : Matrices.**

  Opérations sur les matrices. Propriétés. Matrice inversible. Matrice transposée.
  Matrices colonnes, lignes, triangulaires, diagonales ...
  Rang d'une matrice.

- **Espaces vectoriels.**

  Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.
  Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$
  Sous-espace vectoriel. Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
  Définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Propriétés.
  Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice.
  Théorème : Toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
  Base d'un espace vectoriel. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. *(Nous utilisons les notations $Coord_B(u)$ pour un vecteur u et $Mat_B(u_1, ..., u_n)$ pour une famille.)*
  Base canonique de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}_n[X]$.

  On dit que E est de dimension finie s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.
  De toute famille génératrice finie d'un espace E non réduit au vecteur nul on peut extraire une base.
  Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E. Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$

  Dans un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$:
  - Toute famille libre peut se compléter en une base.
  - Toute famille libre a au plus n éléments.
  - Une famille libre ayant n éléments est une base.
  - Toute famille génératrice a au moins n éléments.
  - Une famille génératrice ayant n éléments est une base.

  Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
  si de plus les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.

  Rang d'une famille finie de vecteurs,
  il peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

  Définition du rang d'une matrice A : dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.

  $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^\top)$, donc c'est aussi la dimension de l'espace engendré par les lignes de A.

  Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, M inversible si, et seulement si, $\text{rg}(M) = n$.

  Dans un espace vectoriel E de base $\mathscr{B}$,
  une famille de vecteurs $\mathscr{F}$ est une base si, et seulement si sa matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

- **Python.**

  Algorithme de Dichotomie. Méthode de Newton. Python et les polynômes.

– –

Exemples de questions de cours :

- Une question de cours sur : "Révisions sur les matrices et les systèmes".
  Exemples :
  Définition de matrices triangulaires, inversibles, transposée, diagonales, identité.
  matrices symétriques, antisymétriques.
  Définition du produit matriciel.
  Formule du binôme. Inversibilité des matrices 2×2
  Théorème fondamental sur les systèmes triangulaires
  (ou son corollaire sur l'inversibilité des matrices triangulaires)
  Définition du rang d'une matrice.

- Une question de cours sur : " Espaces vectoriels ".

  Exemples :

  Définition de la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.
  Définition de la matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base.
  Définition d'une famille libre, génératrice, d'une base.
  Définition du rang d'une famille de vecteurs.

- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est une base de E.
- Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel de référence est un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille finie de vecteurs est libre. (Familles de fonctions, de polynômes, de matrices).
- Résolution d'un système linéaire $p \times n$ avec n et $p \leqslant 5$
- Inversibilité d'une matrice.
- Calcul de l'inverse.
- Calcul du rang.