

DEVOIR SURVEILLÉ
MATHÉMATIQUES

samedi 18 octobre 2025

(3 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les conclusions.

La calculatrice est autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Ce devoir comprend un exercice et deux problèmes, qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Toutefois, pour chacun deux, les réponses doivent être présentées dans l'ordre des questions.

Rappels : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour montrer que C_f est symétrique par rapport à un point $M(a, b)$ il suffit de montrer une des deux égalités suivantes :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \frac{f(a-h) + f(a+h)}{2} = b \quad \text{ou} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(2a-x) + f(x) = 2b$$

- Un point d'inflexion est un point sur le graphe d'une fonction dérivable où la courbe croise sa tangente ; ce qui signifie que, localement, la tangente est au-dessus de la courbe d'un côté et en dessous de l'autre.

Exercice.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \leq 0, & F(x) = 0 \\ \text{si } x \in]0, 1[, & F(x) = 3x^2 - 2x^3 \\ \text{si } x \geq 1, & F(x) = 1. \end{cases}$$

et on note C_F la courbe de la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. On notera f la dérivée de F sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer la dérivée f de F .
- 4) La fonction f est-elle continue ? dérivable sur $\mathbb{R}$?
- 5) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_F au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. On notera $T : y = ax + b$.
b) Factoriser le polynôme : $3x^2 - 2x^3 - (ax + b)$.
c) Montrer que le point $A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ est un point d'inflexion de C_F .
- 6) Montrer que le point $A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de C_F .
- 7) Tracer avec soin l'allure de la courbe C_F sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. (On placera A et on tracera aussi la tangente T).
- 8) On considère ici que le module `matplotlib.pyplot` est importé avec l'instruction suivante :

`import matplotlib.pyplot as plt`

- a) Ecrire une fonction Python `valeur_F(x)` qui prend en entrée un nombre x et qui renvoie $F(x)$
- b) Ecrire un programme Python permettant de tracer la courbe C_F et la tangente T sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Problème 1.

Partie 1

Soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 cinq nombres complexes, on note A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{pmatrix}$$

- 9) Montrer que si les x_i ne sont pas deux à deux distincts alors A n'est pas inversible.
- 10) Dans cette question on suppose que les x_i sont deux à deux distincts,
On considère une liste $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}^5$ vérifiant :

$$A \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on définit avec ces nombres le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3 + \lambda_4 X^4$

- a) Montrer que $P(X)$ possède 5 racines distinctes.
b) En déduire que A est une matrice inversible.
- 11) En conclusion de cette partie, dire pour quelles valeurs de $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dans $\mathbb{C}^5$, la matrice A est inversible.

Partie 2

On note : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$,

- 12) Calculer ω^5 et en déduire que : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
- 13) En déduire les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 & S_2 &= 1 + \omega^3 + \omega^6 + \omega^9 + \omega^{12} \\ S_3 &= 1 + \omega^4 + \omega^8 + \omega^{12} + \omega^{16} & S_4 &= 1 + \omega^5 + \omega^{10} + \omega^{15} + \omega^{20} \end{aligned}$$

- 14) Montrer en utilisant la partie 1 que la matrice suivante est inversible :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad M = \left(\omega^{(i-1)(j-1)} \right)_{1 \leq i, j \leq 5}$$

- 15) En remarquant que $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$,

Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 5 \rrbracket^2$, $\omega^{i-1} \bar{\omega}^{j-1} = 1 \iff i = j$.

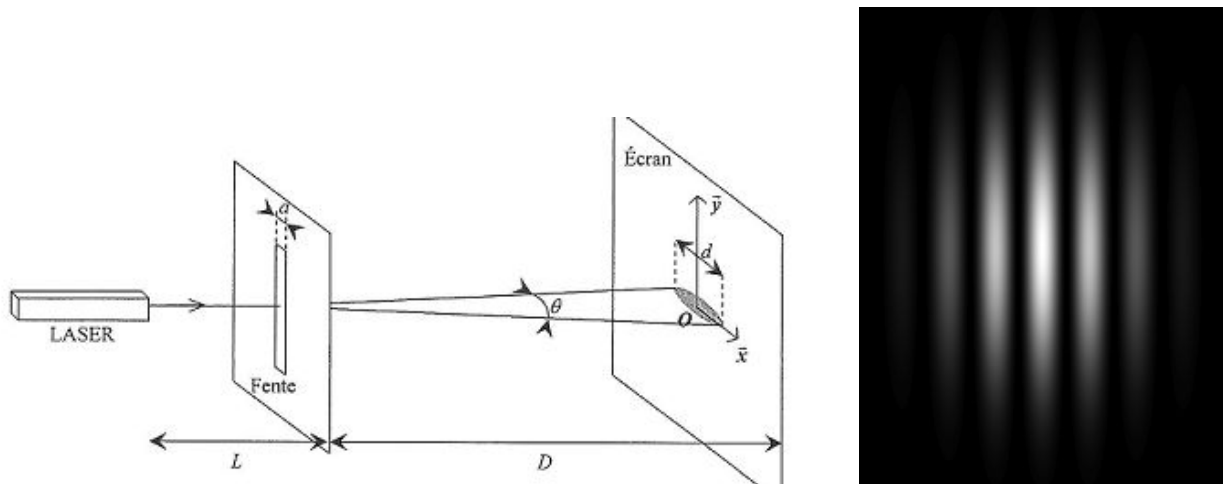
- 16) On définit :

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^3 & \bar{\omega}^4 \\ 1 & \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^4 & \bar{\omega}^6 & \bar{\omega}^8 \\ 1 & \bar{\omega}^3 & \bar{\omega}^6 & \bar{\omega}^9 & \bar{\omega}^{12} \\ 1 & \bar{\omega}^4 & \bar{\omega}^8 & \bar{\omega}^{12} & \bar{\omega}^{16} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \bar{M} = \left(\bar{\omega}^{(i-1)(j-1)} \right)_{1 \leq i, j \leq 5}$$

Calculer $M\bar{M}$ et en déduire M^{-1} .

Problème 2.

Etude de phénomène de diffraction.



En optique ondulatoire, une fente diffracte un rayon incident monochromatique vers un écran placé dans l'alignement de sorte qu'une image de la fente se forme au centre de l'écran, mais également des répliques parallèles. L'intensité lumineuse de la lumière impactant l'écran en fonction de la distance x du centre s'exprime comme multiple du coefficient $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi * a}{\lambda * D} * x\right)$, où a désigne la largeur de la fente, λ la longueur d'onde de la lumière et D la distance entre la fente et l'écran.

Le but de ce problème est d'étudier la position des maximums de l'intensité lumineuse.

Partie 1. Définition de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

17) On fixe n un entier naturel,

Dresser sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ le tableau de variations complet des deux fonctions définies par :

$$f(x) = \tan(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \tan(x) - x$$

18) Montrer que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, que l'on notera dans tout le problème x_n , tel que $x_n \in \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ et $\tan(x_n) = x_n$.

19) Donner la valeur de x_0 .

20) Ecrire une fonction Python qui prend entrée un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-6} près. (On adaptera l'algorithme de dichotomie à ce cas particulier).

Partie 2. Première étude asymptotique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

21) En comparant les intervalles où sont définies les termes x_n et x_{n+1} , déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

22) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

23) a) Rappeler pour un réel t la définition du réel $\arctan(t)$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.

24) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan(u_n) = -\frac{1}{x_n}$.

b) Déterminer un équivalent de la suite (x_n) .

c) En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}$

Partie 3. Application à l'étude de la fonction sinus cardinal.

On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction sinc par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

- 25)** Préciser la parité de la fonction sinc.
- 26)** Prolonger la fonction sinc par continuité en 0 ; *on notera toujours sinc la fonction prolongée et on précisera la valeur de $\text{sinc}(0)$.*
- 27)** Déterminer le signe de la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$ et en déduire que sinc admet un extremum en 0 dont on précisera la nature (*local ou global, maximum ou minimum*).
- 28)** Montrer que sinc est dérivable sur $\mathbb{R}$. (*on étudiera à part la dérivabilité en 0*).
- 29)** Montrer que lorsque $\cos(x) \neq 0$, $\text{sinc}'(x) = \frac{-\cos(x)}{x^2} (\tan(x) - x)$
- 30)** Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(x_n) = (-1)^n \cos(u_n)$ (u_n est définie à la question 24))
- 31)** En déduire un équivalent et le signe de $\text{sinc}(x_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
- 32)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dresser le tableau de signe de $\tan(x) - x$ et de $\cos(x)$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.
(*On discutera suivant la parité de l'entier n .*)
- 33)** Conclure que la fonction sinc atteint bien un extremum en chaque réel x_n ($n \geq 1$) et préciser la nature de cet extremum selon la parité de n .
- 34)** Donner l'allure de la courbe représentative de sinc sur le segment $[-\pi; 3\pi]$. on placera les valeurs x_1 et x_2 .

FIN DU SUJET