

Fiche de révision – Dénombrement

1. Cardinal

• Définition, notation.

Un ensemble est dit fini lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans E .

Dans ce cas, n est unique et s'appelle cardinal de E , on le note $\text{card}(E)$

On note :

$$E = \{x_k \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \text{ avec } \text{card}(E) = n$$

ou

$$E = \{x_k \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \text{ avec } i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$$

• Propriétés.

Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Si $A \subset B$ alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$

• Théorème (Réunions disjointes).

Si $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une famille de p parties deux à deux disjointes, alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i)$$

• Partition.

$(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une partition de B signifie que :

❶ les $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ sont deux à deux disjointes

❷
$$B = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

• Lemme des bergers.

Si les $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ sont deux à deux disjointes,

si $B = \bigcup_{k=1}^p A_k$ et si $\text{card}(A_k) = m$

alors : $\text{card}(B) = p \times m$

• Formule du crible.

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Généralisation à $\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \dots$

• Produit cartésien.

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \text{card}(B)$$

2. Dénombrement d'ensembles finis usuels

E de cardinal n .

• Le nombre de listes de p éléments de E est égal à n^p .

Modélisation : Tirage successif avec remise.

• Le nombre de listes sans répétitions de p éléments de E est égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$

Modélisation : Tirage successif sans remise.

• Le nombre de permutations de E est égal à $n!$

Modélisation : Tirage successif exhaustif sans remise.

• Le nombre de combinaisons de p éléments de E vaut $\binom{n}{p}$

Modélisation : Tirage simultané.

• Le nombre de parties de E est égal à 2^n .

• Notations :

Les listes entre parenthèses $(x_1, \dots, x_p)$

Les parties entre accolades $\{x_1, \dots, x_p\}$

• Anagrammes (Complément) .

Deux raisonnements, deux formules :

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_p!} \quad \binom{N}{n_1} \binom{N-n_1}{n_2} \binom{N-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n_{p-1}+n_p}{n_{p-1}}$$

3. Somme sur un ensemble fini.

$$E = \{e_k \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \text{ avec } \text{card}(E) = n$$

• Définition et notation. $\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i)$

• Propriétés.

❶ Si $A_1, A_2, \dots, A_p$ forment une partition de E alors

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{x \in A_k} f(x) \right)$$

❷ Si σ est une bijection de E dans E ,

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in E} f(\sigma(x))$$

❸ Soit A une partie de E , $\text{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$

4. Applications et cardinaux (complément)

E et F de cardinaux respectifs n et p

• Le nombre d'applications de E dans F est égal à p^n .

• Le nombre d'injections de E dans F est égal à $\frac{p!}{(p-n)!}$.

• (ici $n = p$)

Le nombre de bijections de E dans F est égal à $n!$.

• Conditions nécessaires sur les cardinaux.

S'il existe une injection de E dans F alors $n \leq p$.

S'il existe une surjection de E dans F alors $n \geq p$.

S'il existe une bijection de E dans F alors $n = p$.

• Théorème (Entre deux ensembles de même cardinal).

Soit $f : E \rightarrow F$ avec $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

f est injective si, et seulement si, f est bijective.

f est surjective si, et seulement si, f est bijective.