

## Correction de l'interrogation sur le DS 3

**Ex 1 :** •  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . (fonctions usuelles)

donc  $f$  est continue sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$  et  $f(0) = 1$  donc  $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = f(0)$  et ainsi

donc  $f$  est continue en 0.

En conclusion :

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

**Ex 2 :** a)  $x \mapsto x^2 + 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (fonction polynomiale) donc  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$

b) • Pour  $x < 0$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - x - 1}{x} = -1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$

• Pour  $x > 0$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = x$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

(La limite du taux d'accroissement est différente à droite et à gauche) donc

$f$  n'est pas dérivable en 0

Remarque :  $f$  est dérivable à gauche et à droite de 0, mais pas en 0.

c) • Pour  $x < 1$ ,  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1 + x^2 - 2}{x - 1} = x + 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$

• Pour  $x > 1$ ,  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$

(La limite du taux d'accroissement est réelle et la même à droite et à gauche) donc

$f$  est dérivable en 1

**Ex 3 :** •  $f(1) = 2$  et •  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ , donc  $f'(1) = 1$

Or  $T$  a pour équation  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$  donc  $T : y = x + 1$

**Ex 4 :** On reconnaît le taux d'accroissement en -1 de la fonction  $f : x \mapsto x^5 + 4x^4$   
sa dérivée est :  $f' : x \mapsto 5x^4 + 16x^3$  ce qui donne  $f'(-1) = -11$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 4x^4 - 3}{x + 1} = -11$$

**Ex 5 :**  $\omega \neq 1$  donc  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \frac{1 - \omega^7}{1 - \omega}$  et  $\omega^7 = e^{2i\pi} = 1$  donc

$$S = 0$$

**Ex 6 :** a) On remarque que  $\omega^5 = e^{2i\pi} = 1$

• D'une part pour tout entier  $k$   $(\omega^k)^5 = (\omega^5)^k = 1$  donc

$1, \omega, \omega^2, \omega^3$  et  $\omega^4$  sont 5 racines du polynôme  $X^5 - 1$ .

• D'autre part, pour  $\theta$  et  $\theta'$  dans  $[0; 2\pi[$ , si  $\theta \neq \theta'$  alors  $e^{i\theta} \neq e^{i\theta'}$

et  $e^{i0}, \omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega^2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega^3 = e^{\frac{6i\pi}{5}}$  et  $\omega^4 = e^{\frac{8i\pi}{5}}$  donc

$1, \omega, \omega^2, \omega^3$  et  $\omega^4$  sont deux à deux distinctes

En conclusion :

$1, \omega, \omega^2, \omega^3$  et  $\omega^4$  sont 5 racines distinctes de  $X^5 - 1$ .

b) Sachant que  $\deg(X^5 - 1) = 5$ , on déduit du résultat précédent qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$X^5 - 1 = \lambda(X - 1)(X - \omega)(X - \omega^2)(X - \omega^3)(X - \omega^4)$$

et comme le polynôme est unitaire il vient

$$\boxed{X^5 - 1 = (X - 1)(X - \omega)(X - \omega^2)(X - \omega^3)(X - \omega^4)}$$

- Ex 7 :**
- Si  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  ne sont pas deux à deux distincts, alors au moins deux lignes de  $A_x$  sont égales donc  $\text{rg}(A_x) < 4$  et ainsi  $A_x$  n'est pas inversible.
  - Si  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont deux à deux distincts, Soit  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^4$ , on note  $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$

$$\begin{aligned} A_x \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} P(x_1) = 0 \\ P(x_2) = 0 \\ P(x_3) = 0 \\ P(x_4) = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff P(X) = 0 \quad (\text{En effet } \deg(P) \leq 3 \text{ et } P \text{ à 4 racines distinctes}) \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a montré que  $A_x X = 0 \iff X = 0$  ce qui permet d'affirmer que  $A_x$  est inversible.

En conclusion :

$$\boxed{A_x \text{ est inversible si, et seulement si, } x_1, x_2, x_3 \text{ et } x_4 \text{ sont deux à deux distincts}}$$

- Ex 8 :**
- a) On note  $f : x \mapsto \cos(x) - \frac{x}{n}$ , de sorte que :  $f(x) = 0 \iff x$  solution de  $(E_n)$

$f$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et sur cet intervalle,  $f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{n} < 0$ .

La fonction  $f$  est donc continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

donc  $f$  réalise une bijection de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  dans  $\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right); f(0)\right] = \left[-\frac{\pi}{2n}; 1\right]$

et comme  $0 \in \left[-\frac{\pi}{2n}; 1\right]$ , il existe bien un unique  $x$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $f(x) = 0$

$$\boxed{(E_n) \text{ a une unique solution sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]}$$

b) `from math import cos, pi`

```
def f(x):
    return cos(x) - x/n

def u(n):
    a = 0
    b = pi/2
    while b-a > 2*10**-6:
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a+b)/2
```

**Ex 9 :** a)  $0 < \frac{1}{x}$  donc  $0 < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$  (fonction strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ )

on en déduit  $-\frac{\pi}{2} < -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0$  puis  $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$

$$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

b) Pour  $t$  un réel quelconque,  $\arctan(t)$  est l'unique réel  $\theta$  de  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  vérifiant  $\tan(\theta) = t$

c) On sait déjà que  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  il suffit donc de montrer que  $\tan(\theta) = x$

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \quad \text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ &= x \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\theta = \arctan(x)$$

**Ex 10 :** a) On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n$ ; de plus on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + n\pi = +\infty$  on peut en déduire (comparaison) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$  donc  $1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2n} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$  donc (th. des gendarmes)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$  et ainsi :

$$x_n \sim n\pi$$